Teoría de Relaciones

Unidad II

(Parte 1: Nociones básicas de Relaciones)

Teoría de Relaciones

Contenido

- Idea intuitiva de Relación
- Definición formal de relación
- Relación Binaria y N-aria
- Relación y Función
- Descripción de una Relación
    - Por Extensión
    - Por Comprensión
- Representación Gráfica y Matricial de una Relación

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

Computación o **informática** son dos términos equivalentes para referirse a la disciplina que abarca el estudio y aplicación del tratamiento automático de la información, utilizando sistemas computacionales.

El procesamiento automático de la información consiste en procesar conjuntos de datos, con ayuda del computador (u ordenador), para **extraer información** de ellos.

Extraer información es establecer **asociaciones entre los datos** con la finalidad de responder preguntas acerca del comportamiento del sistema que generó dichos datos.

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

Por ejemplo, supongamos que tenemos el siguiente conjunto de datos:

Tal como está, este listado de datos es de muy poca utilidad

¿Cómo puedo organizar este conjunto de datos para que realmente aporte información de utilidad para la facultad?

María Fernández– Física – 3er. año

Rosa Andrade- Computación - 1er. año

Noelia Ramírez– Biología – 3er. año

Alberto Noguera – Computación – 2do. año

Federico Jiménez – Matemática – 4to. año

Ana María Guerra – Química – 2do. año

Juan Rodríguez – Matemática – 2do. Año

Pedro Pérez – Biología – 1er. Año

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

A partir del conjunto anterior podemos generar otro conjunto, en el cual los datos han sido **clasificados** por carrera y **ordenados** por año.

Computación:

(Rosa Andrade- 1er. Año,

Alberto Noguera - 2do. Año)

Matemática:

(Juan Rodríguez– 2do. Año,

Federico Jiménez – 4to. Año)

Física:

(María Fernández- 3er. Año)

Biología:

(Pedro Pérez - 1er. Año,

Noelia Ramírez– 3er. Año)

Química:

(Ana María Guerra - 2do. Año)

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

Lo que en realidad hicimos fue establecer relaciones entre los elementos de un mismo conjunto y generamos otro conjunto formado por asociaciones entre estos datos.

Asociación 1: x se relaciona con y si x cursa la misma carrera que y

Asociación 2: x se relaciona con y si x cursa un año inferior a y

Computación:

(Rosa Andrade- 1er. Año,

Alberto Noguera - 2do. Año)

Matemática:

(Juan Rodríguez– 2do. Año,

Federico Jiménez – 4to. Año)

Física:

(María Fernández- 3er. Año)

Química:

(Ana María Guerra - 2do. Año)

Biología:

(Pedro Pérez - 1er. Año,

Noelia Ramírez– 3er. Año)

Después formalizaremos este tipo de relaciones de **clasificación** y **ordenamiento** pero antes veamos relaciones de asociación entre datos de conjuntos distintos.

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

A veces los datos están repartidos en conjuntos distintos, y nos interesa **asociar** elementos de un conjunto con elementos del otro.

E: Grupo de Estudiantes **y** **C: Grupo de Carreras**

E	C
Rosa	**Química**
María	**Computación**
Alberto	**Física**
Noelia	**Matemáticas**
Federico	**Biología**
Ana maría	
Pedro	
Juan	

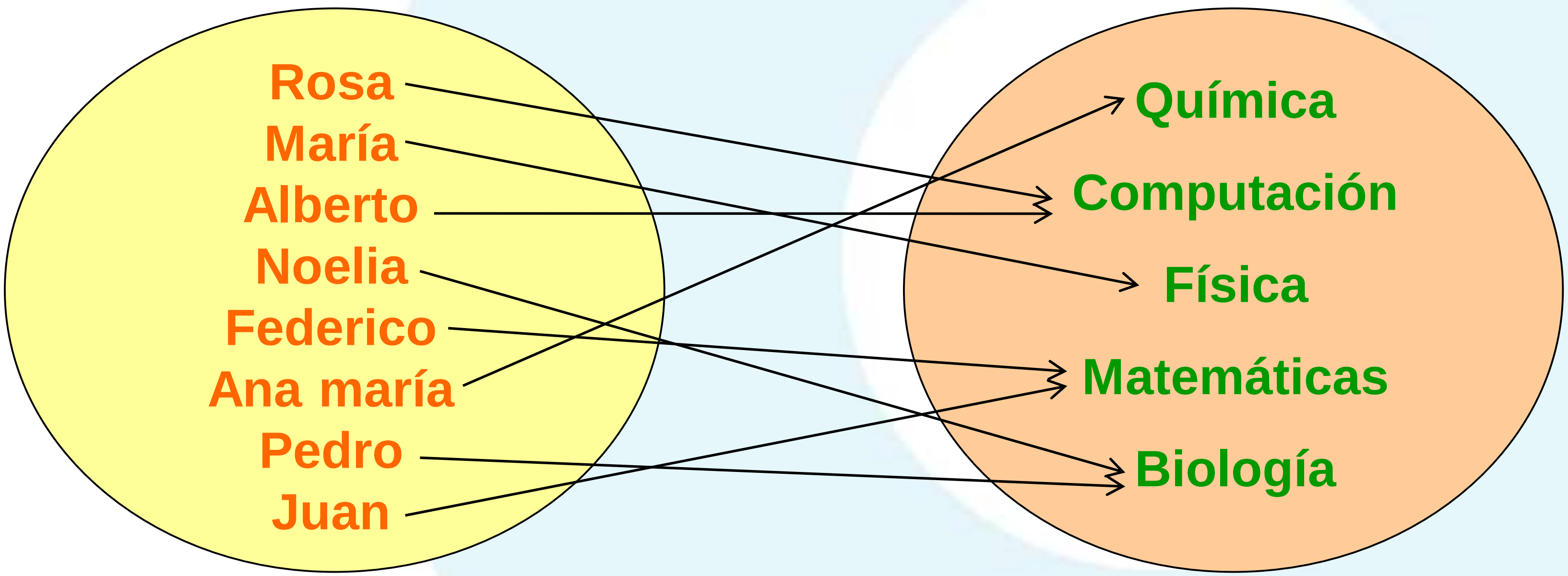
'e' de E se relaciona con 'c' de C si el estudiante 'e' estudia la carrera 'c'

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

A veces los datos están repartidos en conjuntos distintos, y nos interesa **asociar** elementos de un conjunto con elementos del otro.

E: Grupo de Estudiantes y C: Grupo de Carreras



'e' de E se relaciona con 'c' de C si el estudiante 'e' estudia la carrera 'c'

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

A partir de estos dos conjuntos y la propiedad definida entre ellos, se define un nuevo conjunto **R** cuyos elementos son pares de elementos ***(e,c)*** donde ***e*** pertenece al conjunto de los **estudiantes** y ***c*** pertenece al conjunto de las **carreras** y el par ***(e,c)*** significa que ***e*** "*cursa la carrera*" ***c***.

R

(Rosa, Computación)

(María, Física)

(Alberto, Computación)

(Noelia, Biología)

(Federico, Matemática)

(Ana María, Química)

(Pedro, Biología)

(Juan, Matemática)

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

Las combinaciones posibles entre elementos de **E** y **C** eran muchas, de hecho eran 40, sin embargo sólo algunas de ellas hacían verdad la propiedad, el resto hacía falsa la propiedad. Por ejemplo:

Rosa **R** computación = verdad

Rosa **R** Física = falso

Noelia **R** Biología = verdad

Noelia **R** Física = falso

R está formado sólo por aquellos pares que hacen verdad la propiedad.

R

(Rosa, Computación)

(María, Física)

(Alberto, Computación)

(Noelia, Biología)

(Federico, Matemática)

(Ana María, Química)

(Pedro, Biología)

(Juan, Matemática)

Teoría de Relaciones

Formalizando

Formalmente hablando, **R** es un subconjunto del producto cartesiano entre **E** y **C**, es decir, **R∈(ExC)**. En concreto, **R** es el subconjunto formado por los elementos de **(ExC)** que hacen verdad la proposición lógica que define a **R**.

E x C	Rosa	María	Alberto	Noelia	Federico	Ana	Pedro	Juan
Química						V		
Computación	V		V					
Física		V						
Matemáticas					V			V
Biología				V			V	

R ⊆ E x C tal que R = { (x, y) / x ∈ E ∧ y ∈ C ∧ “x cursa la carrera y”}

Teoría de Relaciones

Definición Formal

Relación Binaria:

Una relación binaria **R** definida en los conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano de AxB, es decir, $R \subseteq A \times B$, tal que los elementos de **R** cumplen con una propiedad *P(x,y)* dada; donde $x \in A \wedge y \in B$

En el ejemplo:

- $R = \{ (x, y) / x \in E \wedge y \in C \wedge P(x, y) \}$, donde:
- $P(x, y)$: "*x* cursa la carrera *y*"

Ingredientes necesarios para tener una relación binaria:

- Un conjunto de partida A y un conjunto de llegada B (**pudiera ocurrir que ambos conjuntos fueran el mismo, es decir A=B. En este caso decimos que tenemos una relación definida en un mismo conjunto)**
- Un función proposicional que defina el criterio de relación entre los elementos

La relación se representa por el subconjunto de AxB formado por los pares ordenados que hacen verdad la función proposicional *P(x, y)*

Teoría de Relaciones

Información general

¿Se podrá establecer una relación entre más de dos conjuntos?

Si, puede haber relaciones entre n conjuntos. Sin embargo, en el curso se estudiarán básicamente relaciones entre dos conjuntos (Relaciones Binarias).

Las relaciones entre N conjuntos se denominan Relaciones N-arias

Relación N-aria:

Una relación n-aria **R** definida en los conjuntos A1, A2, ... , An es un subconjunto del producto cartesiano de A1 a An, es decir,

R $\subseteq$ A1 x A2 x ... x An, tal que los elementos de **R** cumplen con una función proposicional $P(x1, x2, ..., xn)$; donde: $(x1 \in A1) \wedge (x2 \in A2) \wedge \ldots \wedge (xn \in An)$

Teoría de Relaciones

Información general

Notación:

Relación Binaria

$(x, y) \in R$

"el par (x, y) pertenece a la relación R"

xRy

"x está relacionado con y"

Relación N-aria

$(x1, x2, \ldots, xn) \in R$

"la n-upla (x1, x2, …, xn) pertenece a R"

(x1, x2, …, xn-1) R xn

"la (n-1)-upla (x1, x2, …, xn-1) está relacionada con xn"

Teoría de Relaciones

Tipos Especiales de Relaciones

Relación Universal: Dado un conjunto A, se define la relación universal en A y se denota U_A, como el conjunto:

$$U_A = \{ (x,y) \,/\, x, y \in A \}, \quad \text{es decir,} \quad U_A = A^2 = A \times A$$

Relación Vacía: Dado un conjunto A, como $\varnothing \subseteq A^2$, se dice que $\varnothing$ es una relación en A y se llama la relación vacía.

Teoría de Relaciones

Información general

Diferencia entre Relación y Función

Relación:

Asociación entre elementos de al menos dos conjuntos A y B, sin restricciones.

Función:

Asociación entre elementos de al menos dos conjuntos A y B, con la restricción de que cada elemento de A debe tener asociado sólo un elemento de B.

Por lo tanto,

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función

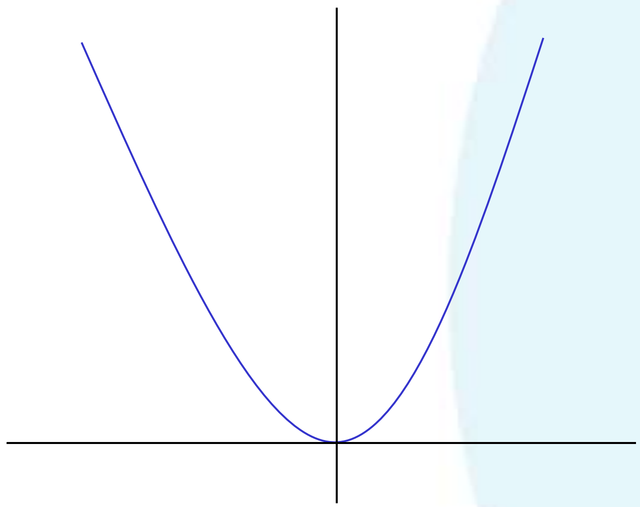
Las funciones son un tipo particular de relación.

Teoría de Relaciones

Información general

Veamos las funciones que se estudian en el cálculo continuo

$y = x^2$



Estas funciones son relaciones que van de los reales en los reales y la propiedad que define la relación viene dada por la definición de la función.

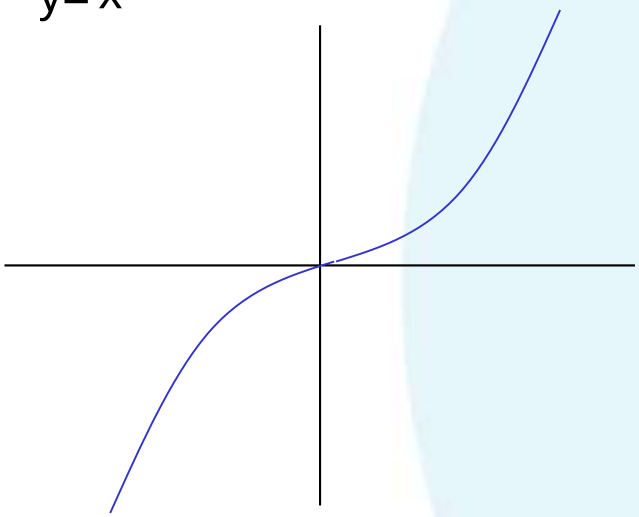
$f(x) = x^2$

$R \subseteq \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ tal que

$R = \{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R} \wedge y \in \mathfrak{R} \wedge y = x^2) \}$

Veamos las funciones que se estudian en el cálculo continuo

$y = x^3$



Estas funciones son relaciones que van de los reales en los reales y la propiedad que define la relación viene dada por la definición de la función.

$f(x) = x^3$

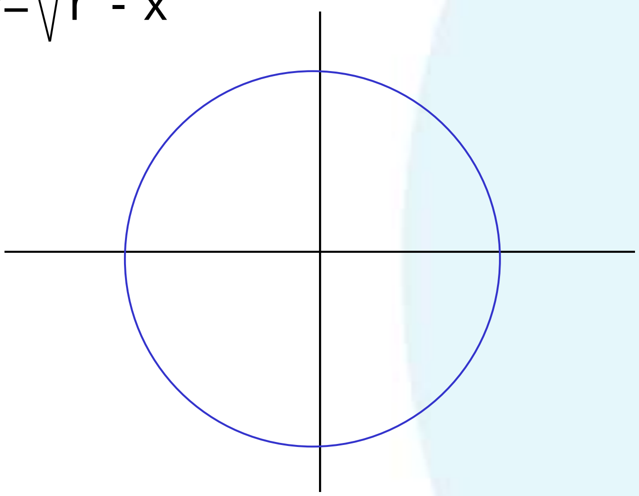
$R \subseteq \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ tal que

$R = \{(x, y) \,/\, x \in \mathfrak{R} \,\wedge\, y \in \mathfrak{R} \,\wedge\, y = x^3\}$

Teoría de Relaciones

¿Por qué esta relación no es una función?

$$y=\sqrt{r^2 - x^2}$$



Esta relación que va de los reales en los reales no satisface la restricción de que cada elemento del conjunto de partida se asocia a un único elemento del conjunto de llegada, luego no es una función.

$$f(x)=\sqrt{r^2 - x^2}$$

$R \subseteq \Re \times \Re$ tal que

$R = \{(x, y) \,/\, x \in \Re \ \wedge\ y \in \Re \ \wedge\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \}$

Teoría de Relaciones

Descripción de una Relación

Sea **R** $\subseteq$ A x B, una relación entre los conjuntos A y B, **R** puede ser descrita,

***Por Extensión*:**

Cuando sus elementos se indican de manera explícita cada uno de los pares ordenados que componen la relación.

Por ejemplo:

R = {(Rosa,computación), (maría,física), (Alberto,computación), (Noelia,biología), (Federico,matemática), (Ana,química), (Pedro,biología), (Juan,matemática) }

***Por Comprensión*:**

Cuando sus elementos se indican de manera implícita a través de la definición de la propiedad que define a la relación.

Por ejemplo:

R $\subseteq$ E x C tal que R = { (x, y) / x $\in$ E $\wedge$ y $\in$ C $\wedge$ "x cursa la carrera y"}

Teoría de Relaciones

(Parte 2: Dominio y Rango, Inversa, Representación de una Relación, composición de relaciones)

Teoría de Relaciones

Contenido

- Dominio y rango de una Relación
- Relación Inversa
- Esquemas de Representación de una Relación
  - Diagrama Sagital
  - Gráficos Cartesianos
  - Representación Matricial
- Composición de Relaciones
- Propiedades de la Composición de Relaciones

Teoría de Relaciones

Dominio y Rango de una Relación

Sea una relación binaria **R** entre los conjuntos A y B, es decir,

$\mathbf{R} = \{ (x, y) \,/\, x \in A \wedge y \in B \wedge P(x, y) \}$ $\qquad \mathbf{R} \subseteq A\text{x}B$

Si $(x, y) \in \mathbf{R}$, se dice que:

x es la pre-imagen de *y* mediante **R**

y es la imagen de *x* a través de **R**

Definiciones de los conjuntos dominio de **R,** $D_{\mathbf{R}}$, y rango de **R,** $R_{\mathbf{R}}$:

$D_{\mathbf{R}} = \{x \,/\, x \in A \wedge (x, y) \in \mathbf{R}\}$

(Son todos los elementos de A, que admiten imagen en B)

$R_{\mathbf{R}} = \{y \,/\, y \in B \wedge (x, y) \in \mathbf{R}\}$

(Son todos los elementos de B, que admiten pre-imagen en A)

Teoría de Relaciones

Relación Inversa

Sea **R** una relación binaria entre los conjuntos A y B, es decir,

$\mathbf{R} = \{ (x, y) \mathbin{/} x \in \mathrm{A} \wedge y \in \mathrm{B} \wedge P(x, y) \}$ $\qquad \mathbf{R} \subseteq \mathrm{AxB}$

se define la relación inversa como:

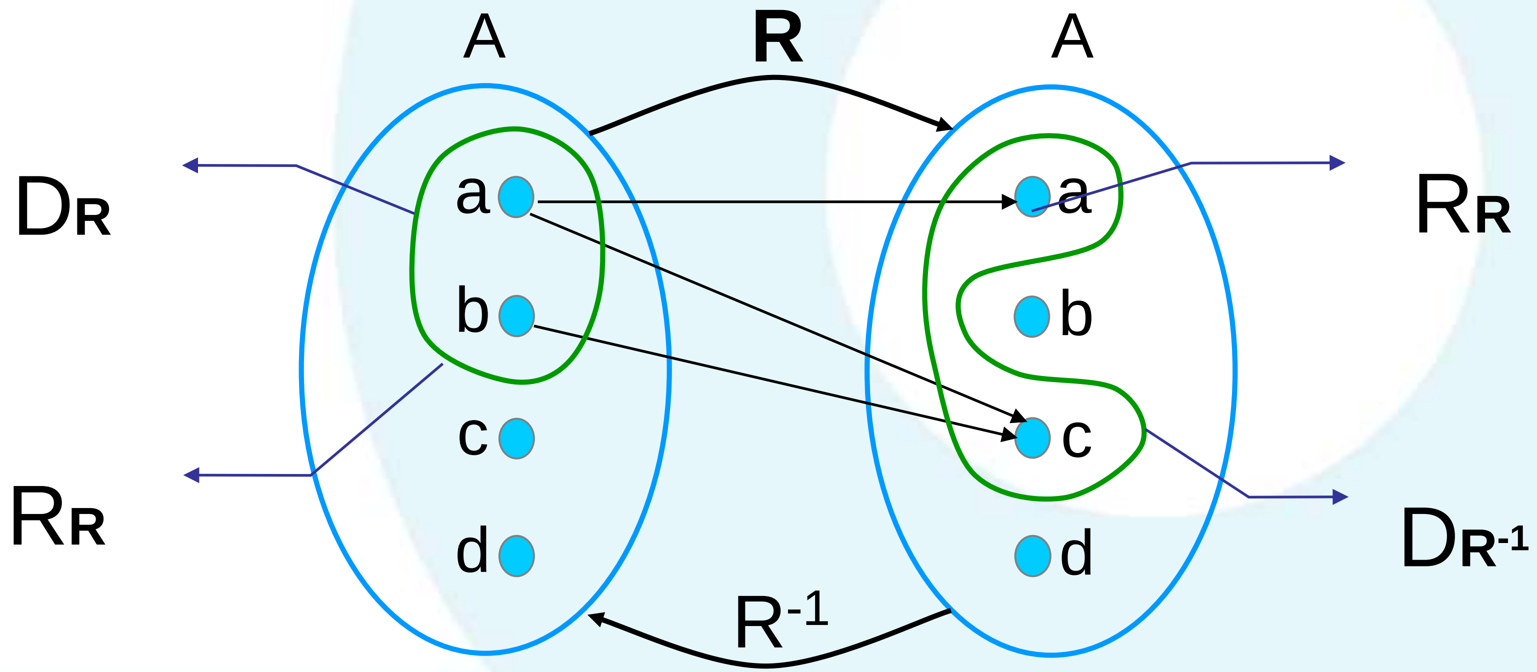
$$\mathbf{R}^{-1} = \{ (y, x) \mathbin{/} (x, y) \in \mathbf{R} \}$$

$$\mathbf{R}^{-1} \subseteq \mathrm{BxA}$$

$$\mathrm{R}_{\mathbf{R}^{-1}} = \mathrm{D}_{\mathbf{R}}$$
$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}^{-1}} = \mathrm{R}_{\mathbf{R}}$$

Ejemplo: Dominio y Rango de una Relación Inversa

Sean A = {a, b, c, d} y **R** $\subseteq$ AxA, donde **R** = { (a,c), (b,c), (a,a) }
La representación de **R** mediante Diagrama Sagital es:



Teoría de Relaciones

Ejemplo 1

Sean

A = {Juan, Pedro, Andrés} y

B={María, Luis, José, Ana}

Se define una relación

R: A $\rightarrow$B como:

R = { (x,y) / $x \in$ A $\wedge$ $y \in$ B $\wedge$ x es padre de y}

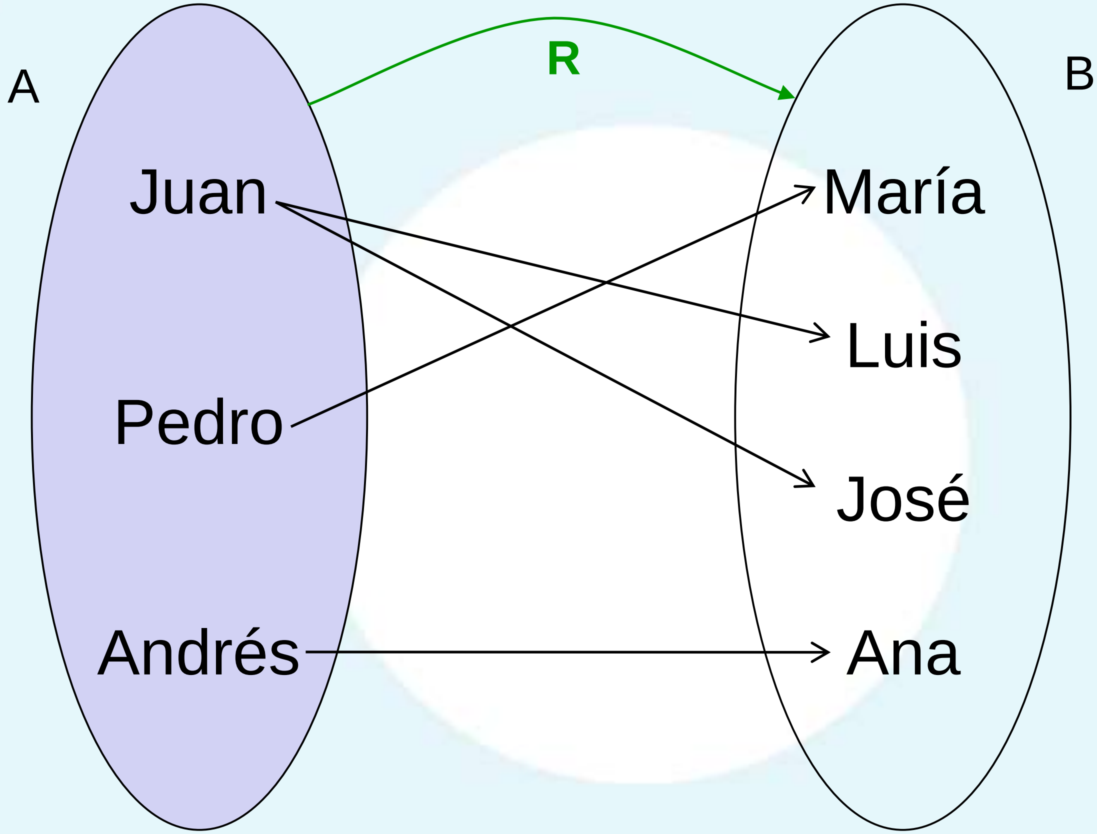
Donde:

Juan es papa de Luis y José

Pedro es papá de María

Andrés es papá de Ana

R $\subseteq$ AxB



D(**R**) = A

Teoría de Relaciones

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{R}^{-1}$ la relación inversa de **R**

$\mathbf{R}^{-1}$: B $\rightarrow$A definida como:

$\mathbf{R}^{-1} = \{ (y,x) \ / \ y \in B \wedge x \in A \wedge$ y es hijo de x$\}$

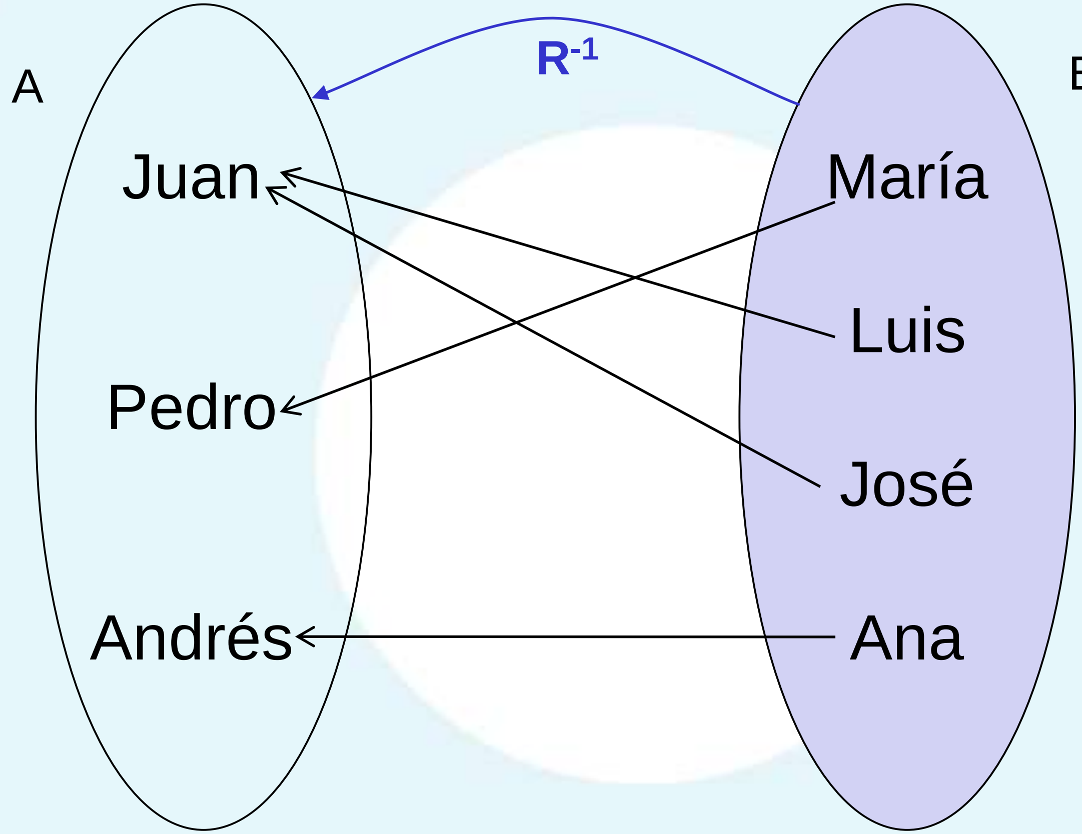
Donde:

Juan es papa de Luis y José

Pedro es papá de María

Andrés es papá de Ana

$\mathbf{R}^{-1} \subseteq$ BxA



D($\mathbf{R}^{-1}$) = B

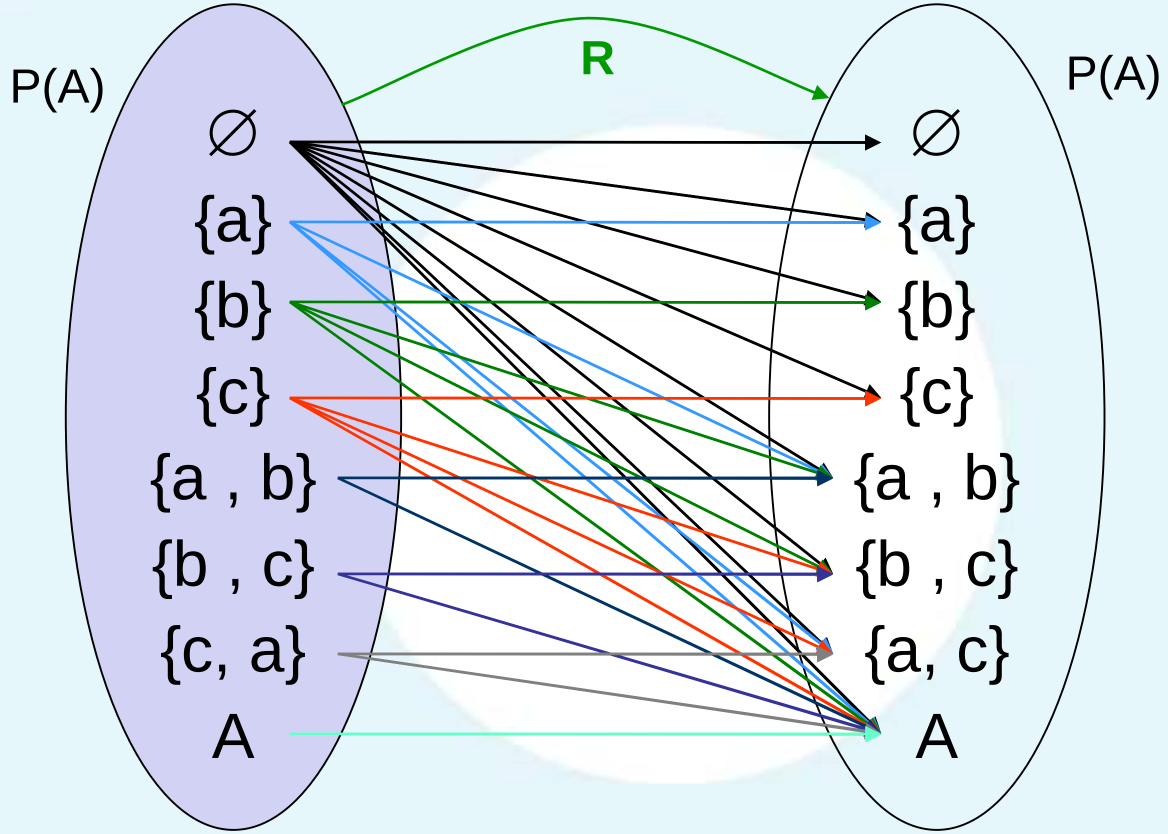
Teoría de Relaciones

Ejemplo 2

Sea A = {a, b, c}. Se define una relación en P(A) como:

R = { (Ai, Aj) / Ai, Aj $\in$ P(A) $\wedge$ Ai $\subseteq$ Aj $\wedge$ i,j $\in$ I } donde
I = {i / i $\in$ N $\wedge$ 1 $\leq$ i $\leq$ 8}

R $\subseteq$ P(A)xP(A)



D(**R**) = R(**R**) = P(A)

Teoría de Relaciones

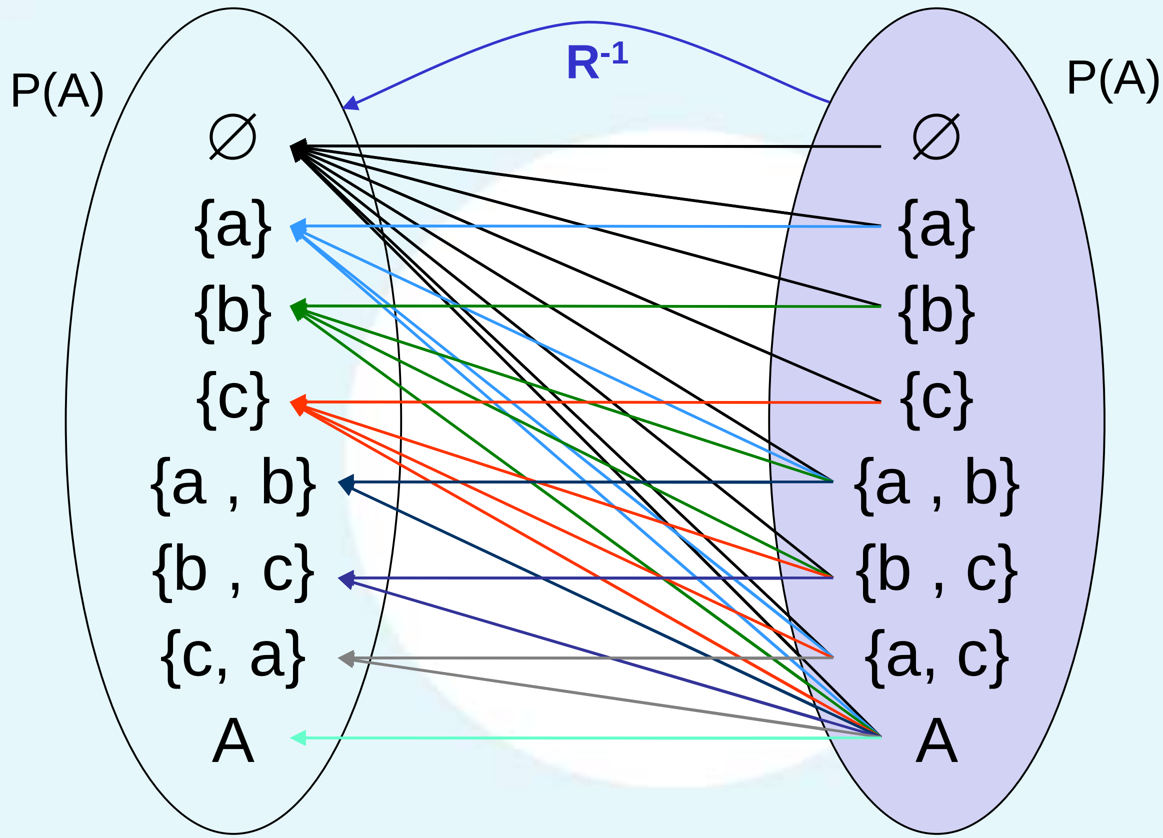
Ejemplo 2

Sea A = {a, b, c}. Se define una relación en P(A) como:

$\mathbf{R}^{-1} = \{ (Aj, Ai) \,/\, Ai, Aj \in P(A) \wedge Ai \supseteq Aj \wedge i,j \in \mathbf{I} \}$ donde

$\mathbf{I} = \{i \,/\, i \in N \wedge 1 \leq i \leq 8\}$

$\mathbf{R}^{-1} \subseteq P(A)xP(A)$



$D(\mathbf{R}^{-1}) = R(\mathbf{R}^{-1}) = P(A)$

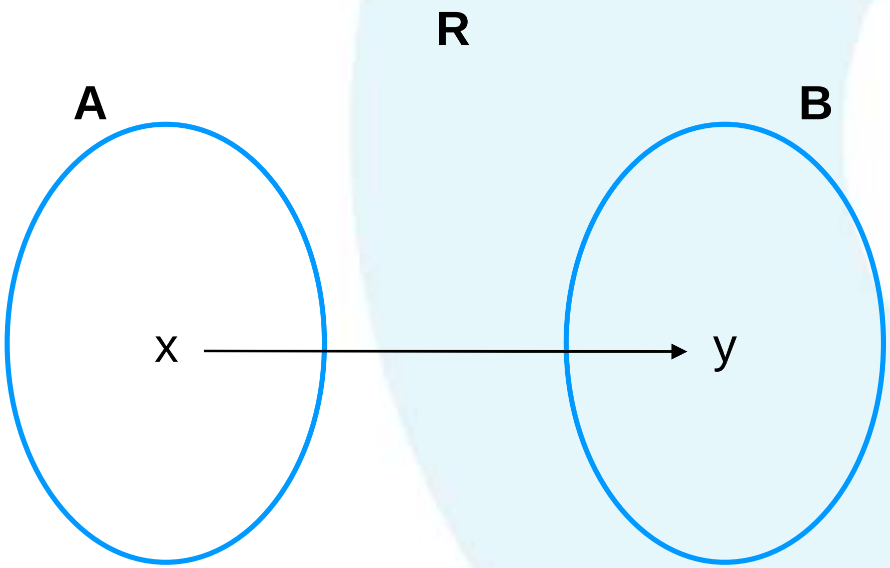
Teoría de Relaciones

Representación Gráfica y Matricial de las Relaciones

Diagrama Sagital:

Sea $R \subseteq A \times B$,

la representación en diagrama sagital de R se realiza representando los conjuntos A y B en diagrama de Venn. Luego, por cada par $(x, y) \in R$, se traza una línea de A a B.



Donde:

$x \in A \wedge y \in B$

$(x, y) \in R$

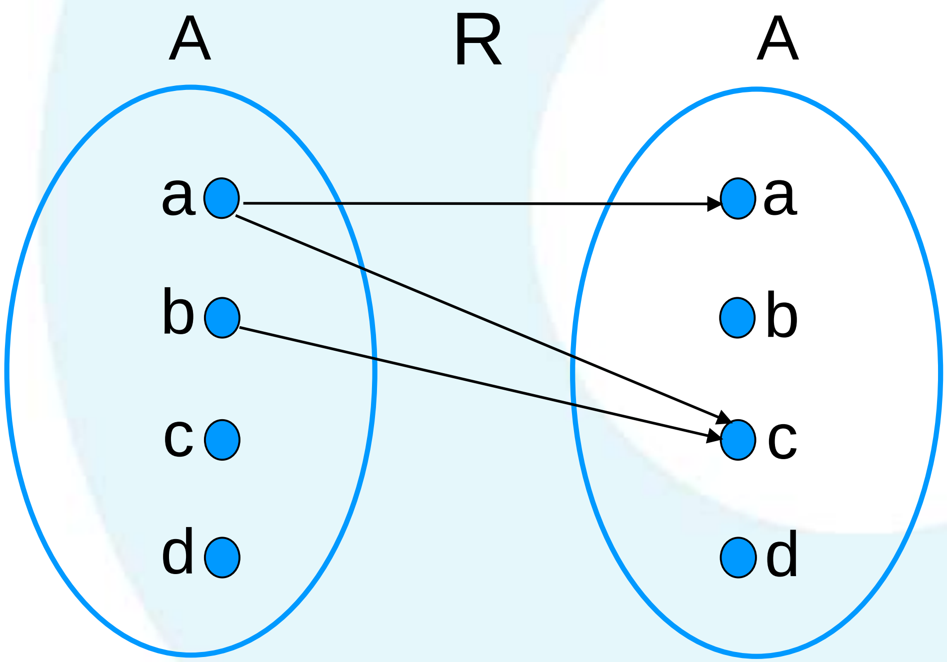
Teoría de Relaciones

Representación Gráfica y Matricial de las Relaciones

Ejemplo:

Sean A = {a, b, c, d} y R $\subseteq$ AxA, donde R = { (a,c), (b,c), (a,a) }

Una representación de R mediante un Diagrama Sagital es:



Teoría de Relaciones

Representación Gráfica y Matricial de las Relaciones

Gráficos Cartesianos:

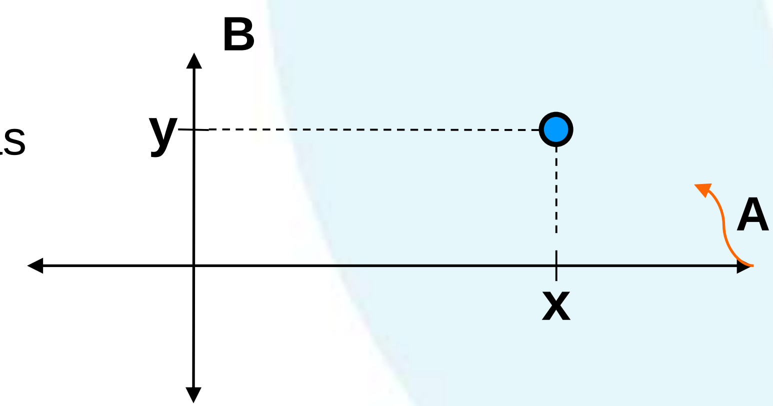
Sea R $\subseteq$ A x B,

la representación cartesiana de R se realiza colocando los elementos de A como abscisas y los elementos de B como ordenadas de un sistema de ejes cartesianos.

Se trazan líneas horizontales y verticales desde cada elemento obteniendo los pares de A x B.

Se resaltan con puntos los elementos de R.

Eje de las Ordenadas



Eje de las Abscisas

Donde:

$x \in A \wedge y \in B$

$(x, y) \in R$

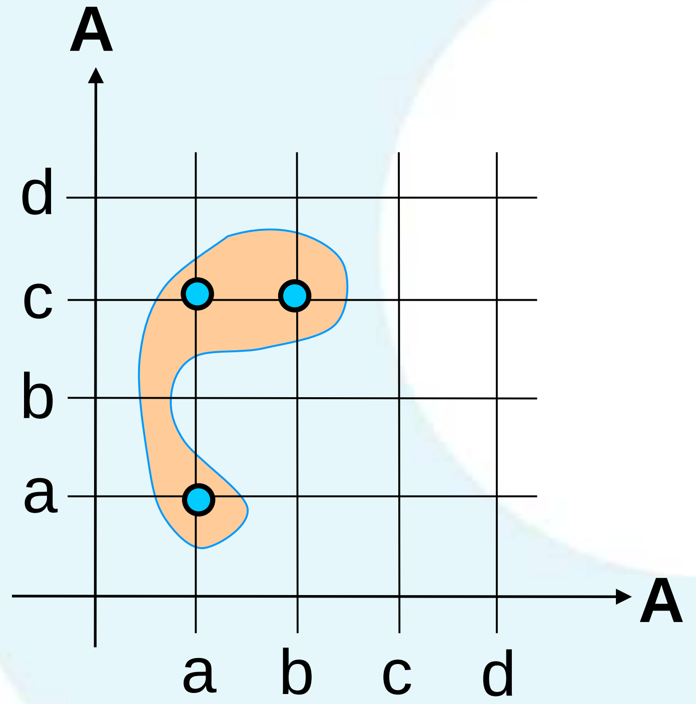
Teoría de Relaciones

Representación Gráfica y Matricial de las Relaciones

Ejemplo:

Sean A = {a, b, c, d} y R $\subseteq$ AxA, donde R = { (a,c), (b,c), (a,a) }

Una representación de R mediante Gráficos Cartesianos es:



Teoría de Relaciones

Representación Gráfica y Matricial de las Relaciones

Matriz de la Relación:

Sea $R \subseteq A \times B$,

la representación matricial de R se realiza colocando los elementos de A como filas y los elementos de B como columnas.

Luego, para la i-ésima fila y la j-ésima columna de M, denotada como M(i, j), tenemos:

$$M(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{Si } (i, j) \in R \\ 0 & \text{Si } (i, j) \notin R \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{b1} & \mathbf{b2} & \mathbf{\ldots} & \mathbf{j} & \mathbf{\ldots} & \mathbf{bn} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{a1} \\ \mathbf{a2} \\ \mathbf{\ldots} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{\ldots} \\ \mathbf{an} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde: $i \in A \wedge j \in B$

$(i, j) \in R$

Por lo tanto, M es de dimensión **m x n**, con

$$\mathbf{m = |A| \text{ y } n = |B|}$$

Teoría de Relaciones

Representación Gráfica y Matricial de las Relaciones

Ejemplo:

Sean A = {a, b, c, d} y R $\subseteq$ AxA, donde R = { (a,c), (b,c), (a,a) }

Una representación de R mediante la Matriz de Relación es:

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \quad A \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{4x4} \\ A & \end{array}$$

Nota:
Esta representación será especialmente importante para los computistas porque es la utilizada para representar una relación en el computador.

Teoría de Relaciones

Composición de Relaciones

Idea Intuitiva: Ejemplo 1

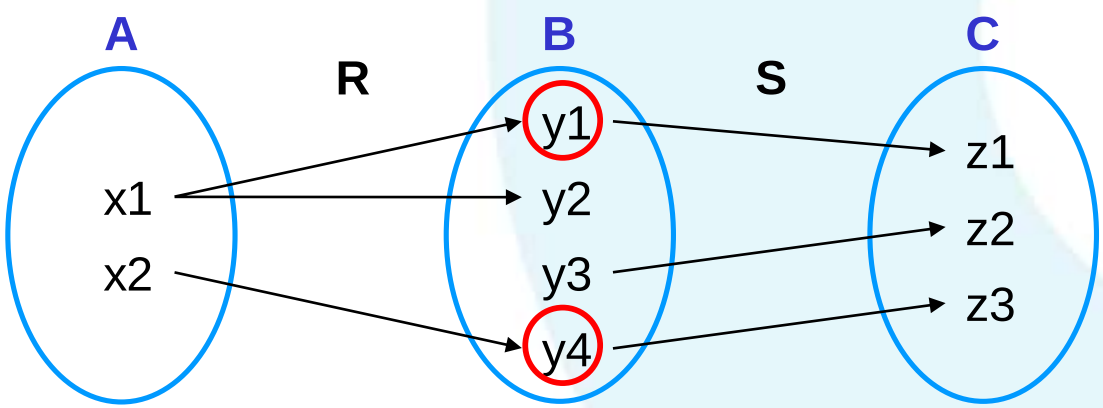
Sean las relaciones **R**: A → B y **S**: B → C, donde los conjuntos son:

A = {x1, x2} B = {y1, y2, y3, y4} y C = {z1, z2, z3}

Supongamos que:

R = {(*x*, *y*) tal que *x* es hijo de *y*}

S = {(*y*, *z*) tal que *y* es hermano de *z*}



S o R

SoR $\subseteq$ A x C

SoR = {(*x*,*z*) tal que existe un *y* $\wedge$ *x* es hijo de *y* $\wedge$ *y* es hermano de *z*}

SoR = {(*x*,*z*) tal que *x* es sobrino de *z*}

SoR = {(*x1*,*z1*),(*x2*,*z3*)}

Teoría de Relaciones

Composición de Relaciones

Idea Intuitiva: Ejemplo 2

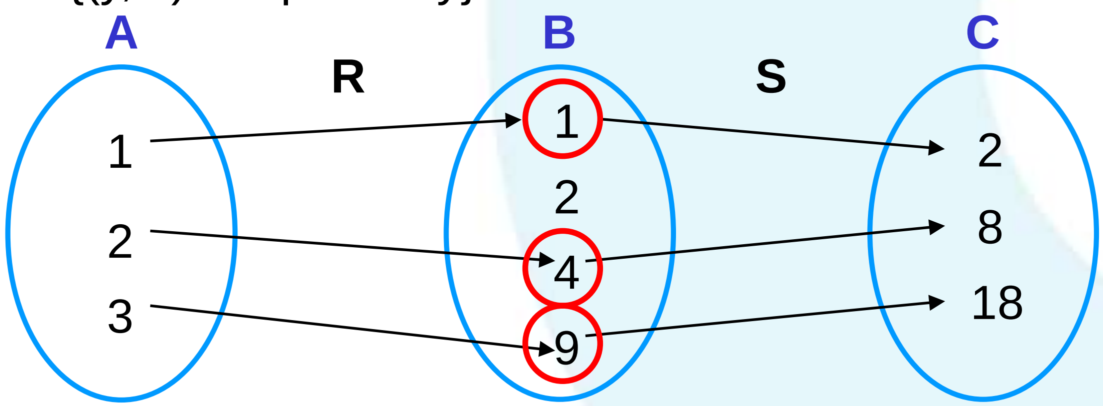
Sean las relaciones **R**: A → B y **S**: B → C, donde los conjuntos son:

A = {1, 2, 3}   B = {1, 2, 4, 9}   y C = {2, 8, 18}

Supongamos que **R** y **S** son:

R = {(x, y) tal que y=x^2}

S = {(y, z) tal que z=2y}



S o R

SoR $\subseteq$ A x C

SoR = {(*x*,*z*) tal que existe un *y* $\wedge$ *y=x2* $\wedge$ *z=2y*}

SoR = {(*x*,*z*) tal que z=2(*x^2*)}

SoR = {(*1*,*2*),(*2*,*8*), (*3*,*18*)}

Teoría de Relaciones

Composición de Relaciones

Definición Formal:

Sean A, B y C tres Conjuntos y sean **R**: A → B y **S**: B → C

a partir de las relaciones **R** y **S**, es posible definir una relación entre A y C, llamada composición entre **R** y **S**, mediante:

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{R} = \{ (x, z) \,/\, x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B\, [(x, y) \in \mathbf{R} \wedge (y, z) \in \mathbf{S}] \}$$

o

$$(x, z) \in (\mathbf{S} \circ \mathbf{R}) \leftrightarrow \exists y\, [(x, y) \in \mathbf{R} \wedge (y, z) \in \mathbf{S}]$$

o

$$x\, (\mathbf{S} \circ \mathbf{R})\, z \leftrightarrow \exists y\, [x\, \mathbf{R}\, y \wedge y\, \mathbf{S}\, z]$$

Teoría de Relaciones

Composición de Relaciones

Definición Formal ilustrada:

Sean A, B y C tres Conjuntos y sean **R**: A → B y **S**: B → C

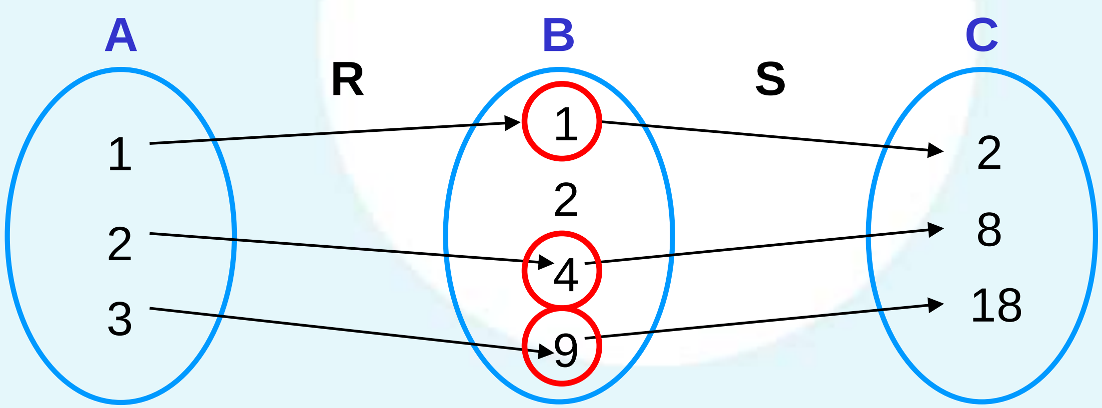
a partir de las relaciones **R** y **S**, es posible definir una relación entre A y C, llamada composición entre **R** y **S**, mediante:

$$(x, z) \in (\mathbf{S} \circ \mathbf{R}) \leftrightarrow \exists\, y\ [(x, y) \in \mathbf{R} \wedge (y, z) \in \mathbf{S}]$$

Supongamos que **R** y **S** son:

R = {(x, y) tal que y=x^2}

S = {(y, z) tal que z=2y}



Teoría de Relaciones

Propiedades de la Composición de Relaciones

Sean las relaciones **R** de A a B, **S** de B a C y **T** de C a D. Y sean además las relaciones **S1** y **S2** de B a C:

- **Asociatividad**: (T o S) o R = T o (S o R)
- **Inversa:** $(S \text{ o } R)^{-1} = R^{-1} \text{ o } S^{-1}$
- **Distributiva:**

$(S1 \cup S2) \text{ o } R = (S1 \text{ o } R) \cup (S2 \text{ o } R)$

$(S1 \cap S2) \text{ o } R \subseteq (S1 \text{ o } R) \cap (S2 \text{ o } R)$

$T \text{ o } (S1 \cup S2) = (T \text{ o } S1) \cup (T \text{ o } S2)$

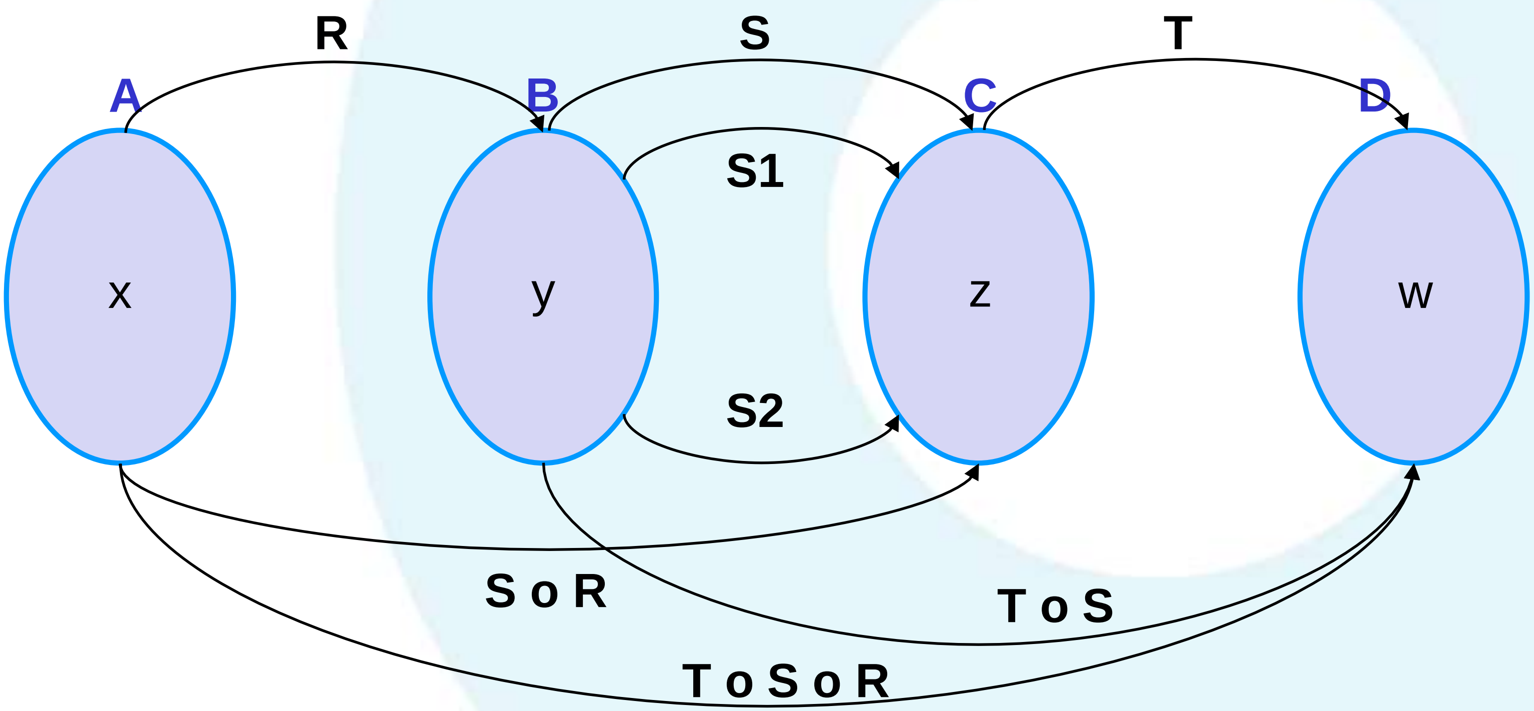
$T \text{ o } (S1 \cap S2) \subseteq (T \text{ o } S1) \cap (T \text{ o } S2)$

Nota:
Fíjese que la distributiva con la intersección genera una inclusión en lugar de una igualdad. Reflexione acerca de esta cualidad.

Propiedades de la Composición de Relaciones

Representación mediante diagrama sagital:

$x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C \wedge w \in D$



Teoría de Relaciones

Demostración usando Composición de Relaciones

Tomar un ejercicio de la práctica en el que haya que demostrar alguna propiedad relacionada con la composición de relaciones y resolverlo en clase.

Teoría de Relaciones

Unidad II

(Parte 3: Relaciones en un mismo conjunto)

Teoría de Relaciones

Contenido

- RELACIÓN IDENTIDAD
- PROPIEDADES QUE PUEDE CUMPLIR $R \subseteq AxA$
  - REFLEXIVIDAD Y SUS VARIANTES
  - REFLEXIVIDAD Y LOS TIPOS DE REPRESENTACIÓN DE RELACIONES
  - SIMETRÍA Y SUS VARIANTES
  - SIMETRÍA Y LOS TIPOS DE REPRESENTACIÓN DE RELACIONES
  - TRANSITIVIDAD Y SUS VARIANTES
  - TRANSITIVIDAD Y LA REPRESENTACIÓN EN DIGRAFOS
  - ANTISIMETRÍA
- EJEMPLOS

Teoría de Relaciones

Relación Identidad

Ejemplo: Relación Identidad

$I_A = \{ (x,y) \,/\, x, y \in A \wedge x = y \}$, es decir, $I_A = \{ (x,x) \,/\, x \in A \}$

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad I_A = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$

Grafos Dirigidos o Digrafos

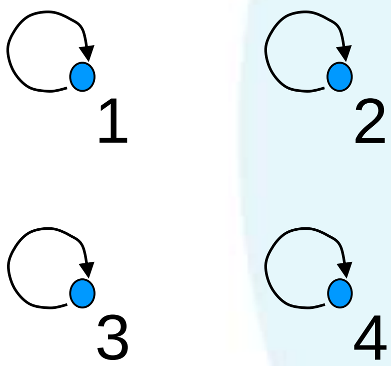
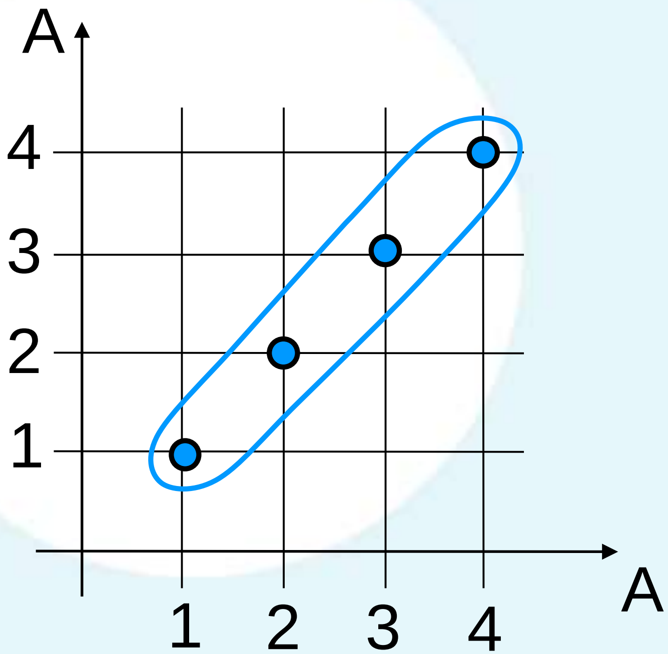


Gráfico Cartesiano



Teoría de Relaciones

Tipos Especiales de Relaciones

Observación:

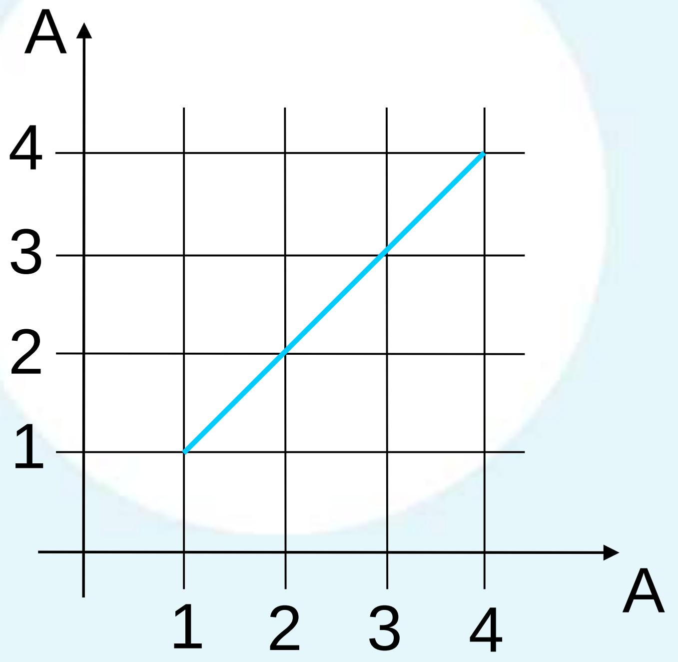
Relación Identidad Discreta

El caso anterior $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (Conjunto Discreto)

$A = \{ x \,/\, x \in N \wedge 1 \leq x \leq 4 \}$

$I_A = \{ (x,x) \,/\, x \in A\}$, entonces

$I_A = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$



Relación Identidad Continua

Sea:

$A = \{ x \,/\, x \in R \wedge 1 \leq x \leq 4 \}$

$I_A = \{ (x,x) \,/\, x \in R \wedge 1 \leq x \leq 4 \}$

Teoría de Relaciones

Propiedades que Puede Cumplir una Relación $R \subseteq A \times A$

Una Relación $R \subseteq A \times A$ puede cumplir una serie de propiedades:

Reflexividad

Variantes
- No Reflexividad
- Arreflexividad

Simetría

Variantes
- No Simetría
- Asimetría
- Antisimetría

Transitividad

Variantes
- No Transitividad
- Atransitividad

Teoría de Relaciones

Reflexividad y sus Variantes

Reflexividad:

$\forall x\ [\ x \in A \rightarrow (x, x) \in R\ ]$ (Todo elemento de A se relaciona consigo mismo)

Se cumple $I_A \subseteq R$

No Reflexividad:

$\exists x\ [\ x \in A \wedge (x, x) \notin R\ ]$ (Negación de la reflexividad)

Se cumple $R \cap I_A \neq I_A$

Arreflexividad:

$\forall x\ [\ x \in A \rightarrow (x, x) \notin R\ ]$ (No permite pares reflexivos)

Se cumple $R \cap I_A = \varnothing$

Toda relación Arreflexiva es una relación No Reflexiva

Teoría de Relaciones

Reflexividad y sus Variantes

Ejemplos para relaciones por comprensión:

Reflexividad:

$\forall x\, [\, x \in A \rightarrow (x, x) \in R\,]$

$A = N$ y $I_A = \{ (x, x) \,/\, x \in A \}$ $\quad R \subseteq N \times N$

$A = Z$ y $R = \{ (x, y) \,/\, x, y \in Z \wedge x - y \in Z \}$ $\quad R \subseteq Z \times Z$

No Reflexividad:

$\exists x\, [\, x \in A \wedge (x, x) \notin R\,]$

$A = N$ y $R = \{ (x, y) \,/\, x, y \in N \wedge x + y = 10 \}$ $\quad R \subseteq N \times N$

Arreflexividad:

$\forall x\, [\, x \in A \rightarrow (x, x) \notin R\,]$

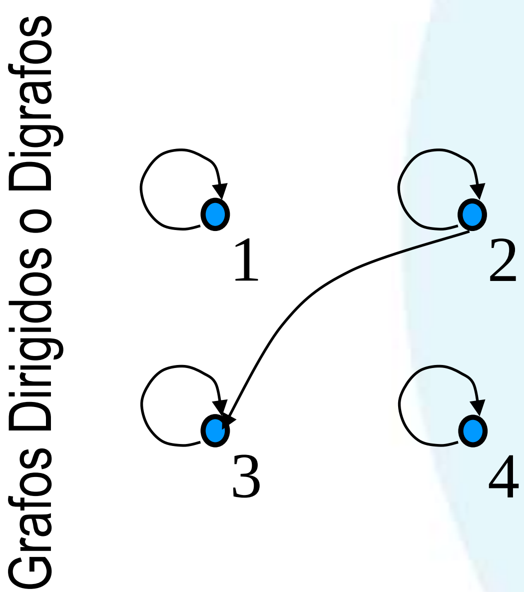
$A = N$ y $R = \{ (x, y) \,/\, x, y \in N \wedge x > y \}$ $\quad R \subseteq N \times N$

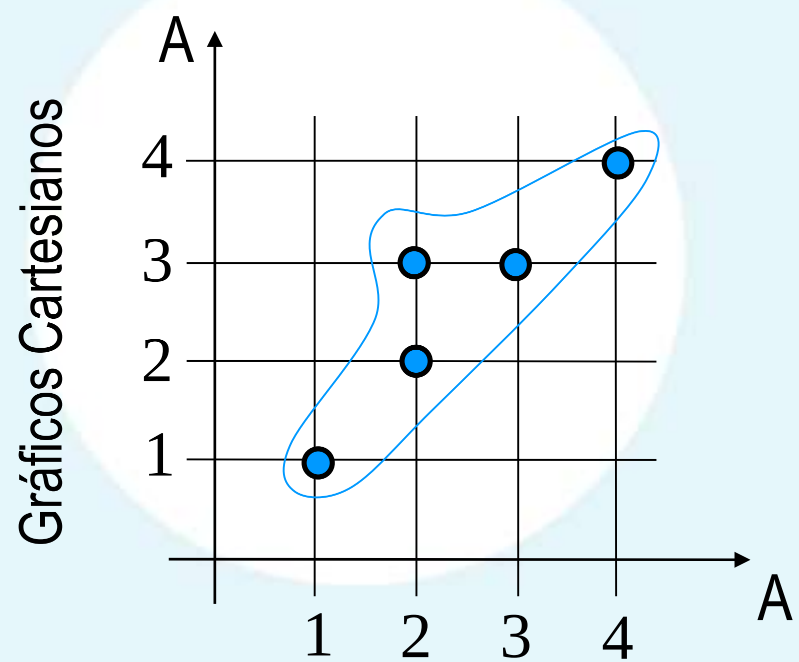
Teoría de Relaciones

Reflexividad y los Tipos de Representación de Relaciones

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4) \}$ $R \subseteq A \times A$

R es REFLEXIVA.





Teoría de Relaciones

Reflexividad y los Tipos de Representación de Relaciones

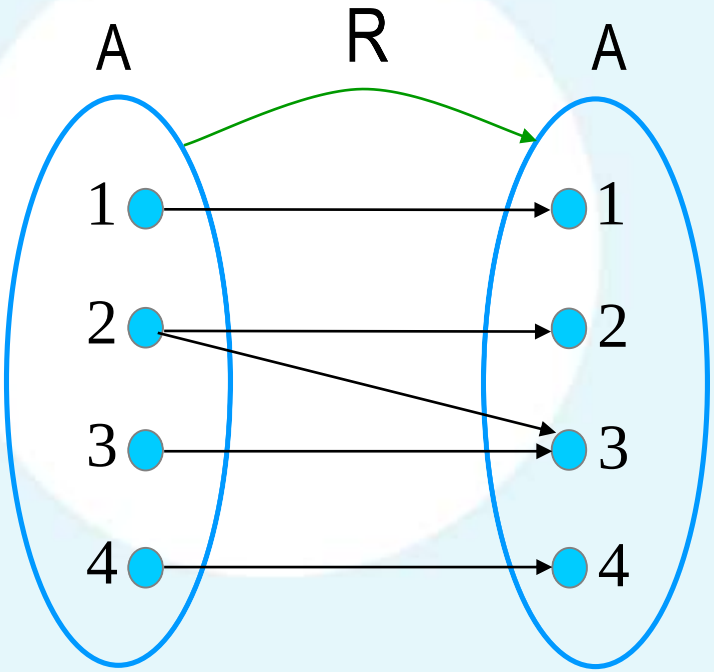
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4) \}$ $R \subseteq A \times A$

R es REFLEXIVA.

Matriz de la Relación

$$
\begin{array}{c|c}
M & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad A \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} \\
A &
\end{array}
$$

Diagrama Sagital



Teoría de Relaciones

Simetría y sus Variantes

Simetría:

$\forall x \forall y\ [\ (\ x,y \in A \wedge (x,\ y) \in R\ ) \rightarrow (y,\ x) \in R\ ]$

(Si un elemento de A se relaciona con otro elemento, este último también se debe relacionar con el primero)

No Simetría:

$\exists x \exists y\ [\ x,y \in A \wedge (x,\ y) \in R \wedge (y,\ x) \notin R\ ]$

(Negación de la simetría)

Asimetría:

$\forall x \forall y\ [\ (\ x,y \in A \wedge (x,\ y) \in R\ ) \rightarrow (y,\ x) \notin R\ ]$

(No permite pares (x, x))

Toda relación Asimétrica es una relación No Simétrica

Antisimetría:

$\forall x \forall y\ [\ (\ x,y \in A \wedge (x,\ y) \in R \wedge (y,\ x) \in R\ ) \rightarrow\ x = y\ ]$

(si dos pares, con sus componentes x, y permutadas, pertenecen a la relación, entonces x tiene que ser igual a y, es decir,
la única manera de hablar de simetría es considerando los pares (x, x))

Es cuando R es Asimétrica ; pero permite pares (x, x)

Teoría de Relaciones

Simetría y sus Variantes

Ejemplos para relaciones por comprensión:

Simetría:

$\forall x \forall y\ [\ (\ x,y \in A \wedge (x, y) \in R\ ) \rightarrow (y, x) \in R\ ]$

$A = N \quad y \quad R = \{\ (x, y)\ /\ x, y \in N \wedge\ x + y \in N\ \} \qquad R \subseteq NxN$

No Simetría y Antisimetría

$\exists x \exists y\ [\ x,y \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R\ ]$

$A = N \quad y \quad R = \{\ (x, y)\ /\ x, y \in N \wedge\ x \leq y\ \} \qquad R \subseteq NxN$

Asimetría:

$\forall x \forall y\ [\ (\ x,y \in A \wedge (x, y) \in R\ ) \rightarrow (y, x) \notin R\ ]$

$A = N \quad y \quad R = \{\ (x, y)\ /\ x, y \in N \wedge\ x < y\ \} \qquad R \subseteq NxN$

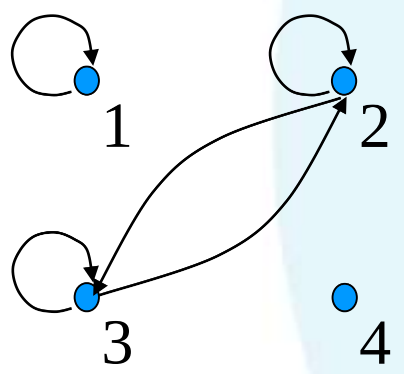
Teoría de Relaciones

Simetría y los Tipos de Representación de Relaciones

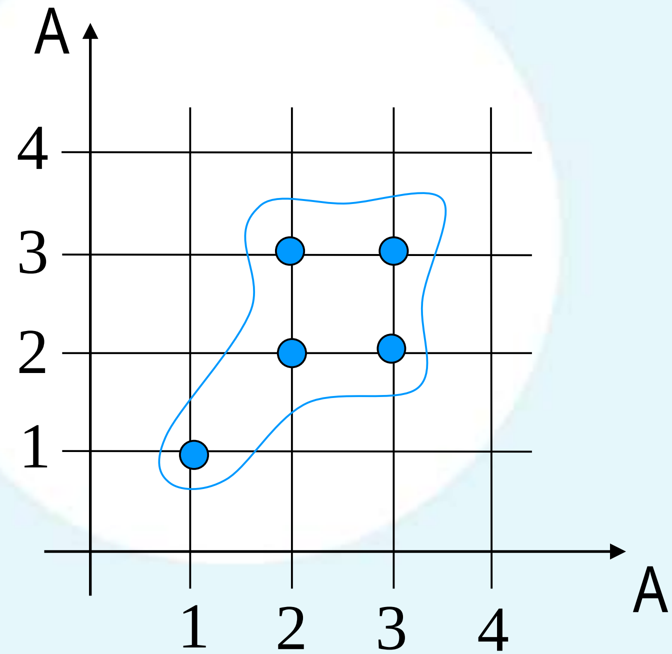
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \}$ $R \subseteq A \times A$

R es SIMÉTRICA.

Grafos Dirigidos o Digrafos



Gráficos Cartesianos



Teoría de Relaciones

Simetría y los Tipos de Representación de Relaciones

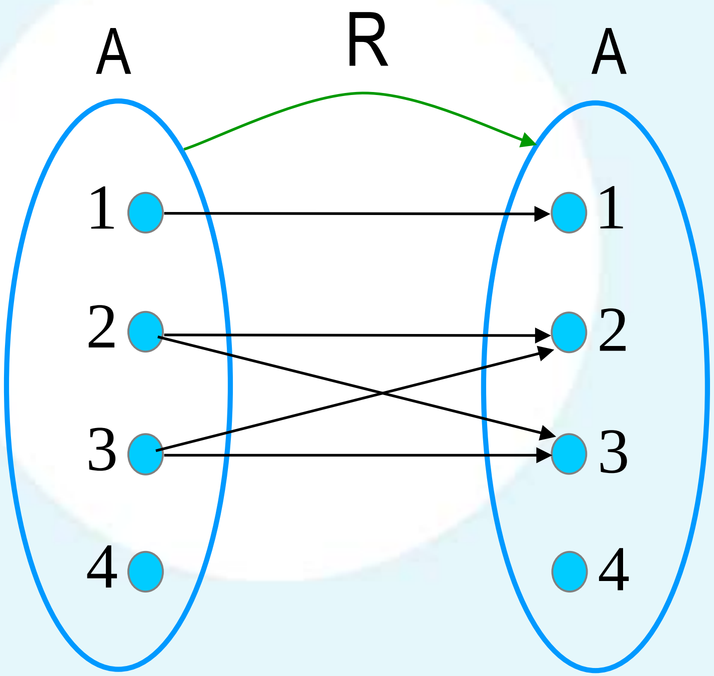
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \}$ $R \subseteq A \times A$

R es SIMÉTRICA.

Matriz de la Relación

$$\begin{array}{c|c} M & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \; A \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4x4} \\ A & \end{array}$$

Diagrama Sagital



Teoría de Relaciones

Transitividad y sus Variantes

Transitividad:

$\forall x \forall y \forall z\ [\ (\ x,y,z \in A \wedge (x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R\ ) \rightarrow (x,\ z) \in R\ ]$

(Si un elemento de A se relaciona con otro elemento, y éste a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero se debe relacionar con el tercero)

No Transitividad:

$\exists x \exists y \exists z\ [\ x,y,z \in A \wedge (x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \wedge (x,\ z) \notin R\ ]$

(Negación de la transitividad)

Atransitividad:

$\forall x \forall y \forall z\ [\ (\ x,y,z \in A \wedge (x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R\ ) \rightarrow (x,\ z) \notin R\ ]$

(No permite pares (x, x))

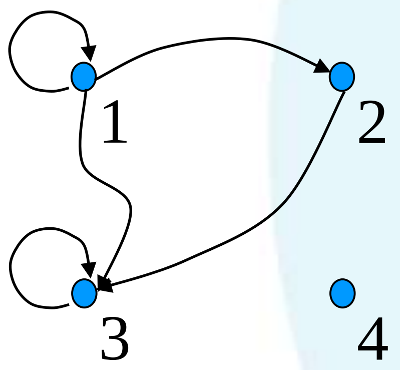
Toda relación Atransitiva es una relación No Transitiva

Transitividad y los Tipos de Representación de Relaciones

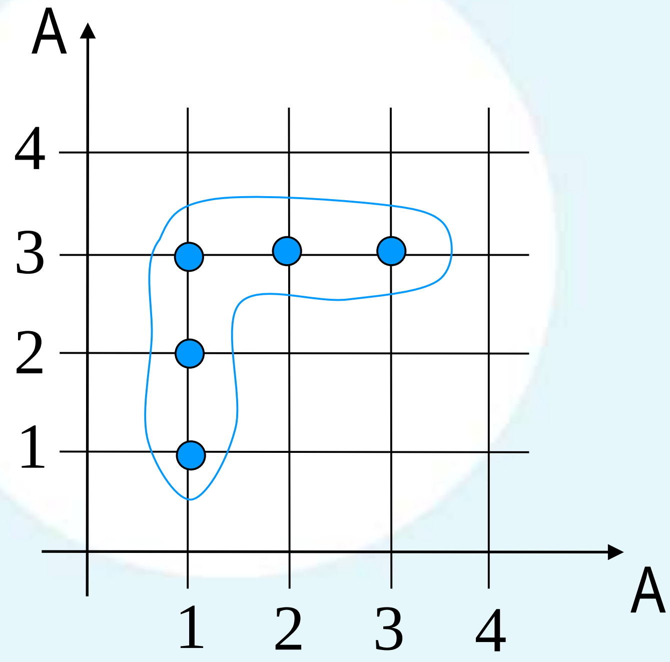
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3) \}$ $R \subseteq A \times A$

R es TRANSITIVA.

Grafos Dirigidos o Digrafos



Gráficos Cartesianos



Teoría de Relaciones

Transitividad y los Tipos de Representación de Relaciones

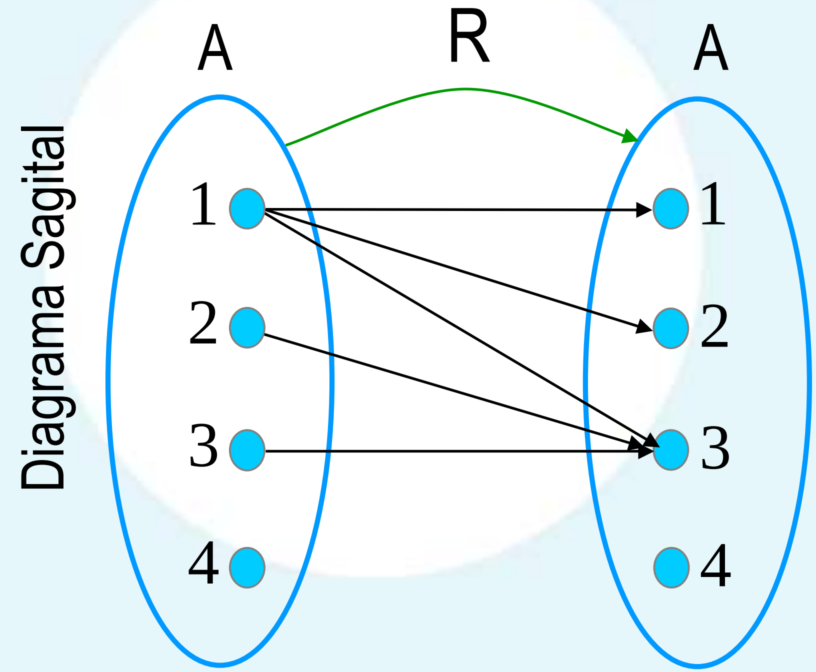
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3) \}$ $R \subseteq A \times A$

R es TRANSITIVA.

Matriz de la Relación

$$\begin{array}{c|cccc} M & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4x4} \end{array}$$

Filas: A; Columnas: A

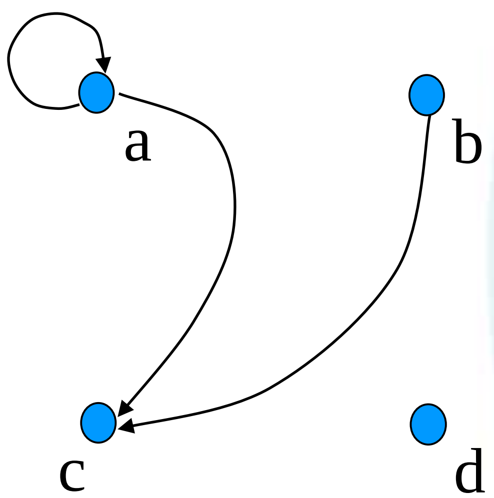


Teoría de Relaciones

Ejemplo

Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $R \subseteq A \times A$, donde $R = \{ (a,c), (b,c), (a,a) \}$

Una representación de R mediante Grafos Dirigidos es:



Reflexividad	✗	Asimetría	✗
No Reflexividad	✓	Antisimetría	✓
Arreflexividad	✗	Transitividad	✓
Simetría	✗	No Transitividad	✗
No Simetría	✓	Atransitividad	✗

R es NO REFLEXIVA, NO SIMÉTRICA, ANTISIMÉTRICA, TRANSITIVA.

Teoría de Relaciones

Ejemplo completo

Ejercicio:

Tomar un ejercicio de la práctica y demostrar que una cierta relación R, definida por comprensión, es reflexiva, simétrica y transitiva.

Teoría de Relaciones

Unidad II

(Parte 4: Relaciones de Equivalencia)

Teoría de Relaciones

Contenido

- Introducción a los Tipos de relaciones
- Relaciones de equivalencia
  - Definición
  - Clases de equivalencia: [a]
  - Conjunto cociente: A/R
  - Propiedades de las clases de equivalencia [a]
  - Propiedades del conjunto cociente A/R
  - Ejemplos

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

Recordemos el ejemplo cuando iniciamos el estidio de Relaciones

Tal como está, este listado de datos es de muy poca utilidad

¿Cómo puedo organizar este conjunto de datos para que realmente aporte información de utilidad para la facultad?

María Fernández– Física – 3er. año

Rosa Andrade- Computación - 1er. año

Noelia Ramírez– Biología – 3er. año

Alberto Noguera – Computación – 2do. año

Federico Jiménez – Matemática – 4to. año

Ana María Guerra – Química – 2do. año

Juan Rodríguez – Matemática – 2do. Año

Pedro Pérez – Biología – 1er. Año

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

A partir del conjunto anterior podemos generar otro conjunto, en el cual los datos han sido **clasificados** por carrera y **ordenados** por año.

Computación:

(Rosa Andrade- 1er. Año,

Alberto Noguera - 2do. Año)

Matemática:

(Juan Rodríguez– 2do. Año,

Federico Jiménez – 4to. Año)

Física:

(María Fernández- 3er. Año)

Biología:

(Pedro Pérez - 1er. Año,

Noelia Ramírez– 3er. Año)

Química:

(Ana María Guerra - 2do. Año)

Teoría de Relaciones

Idea Intuitiva

Lo que en realidad hicimos fue establecer relaciones entre los elementos de un mismo conjunto y generamos otro conjunto formado por asociaciones entre estos datos.

Asociación 1: *x* se relaciona con *y* sii *x* cursa la misma carrera que *y*

Asociación 2: Sean *x* y *y* de la misma carrera, *x* se relaciona con *y* sii *x* cursa un año inferior a *y*

Computación:

(Rosa Andrade- 1er. Año,

Alberto Noguera - 2do. Año)

Matemática:

(Juan Rodríguez– 2do. Año,

Federico Jiménez – 4to. Año)

Física:

(María Fernández- 3er. Año)

Biología:

(Pedro Pérez - 1er. Año,

Noelia Ramírez– 3er. Año)

Química:

(Ana María Guerra - 2do. Año)

Teoría de Relaciones

Tipos de Relaciones

En la vida cotidiana frecuentemente nos encontramos con la necesidad de clasificar o ordenar elementos de un conjunto:

Clasificar
=
Relación de Equivalencia

Ordenar
=
Relación de Orden

Teoría de Relaciones

Relación de Equivalencia

Ejemplo

Clasificación del Reino Animal

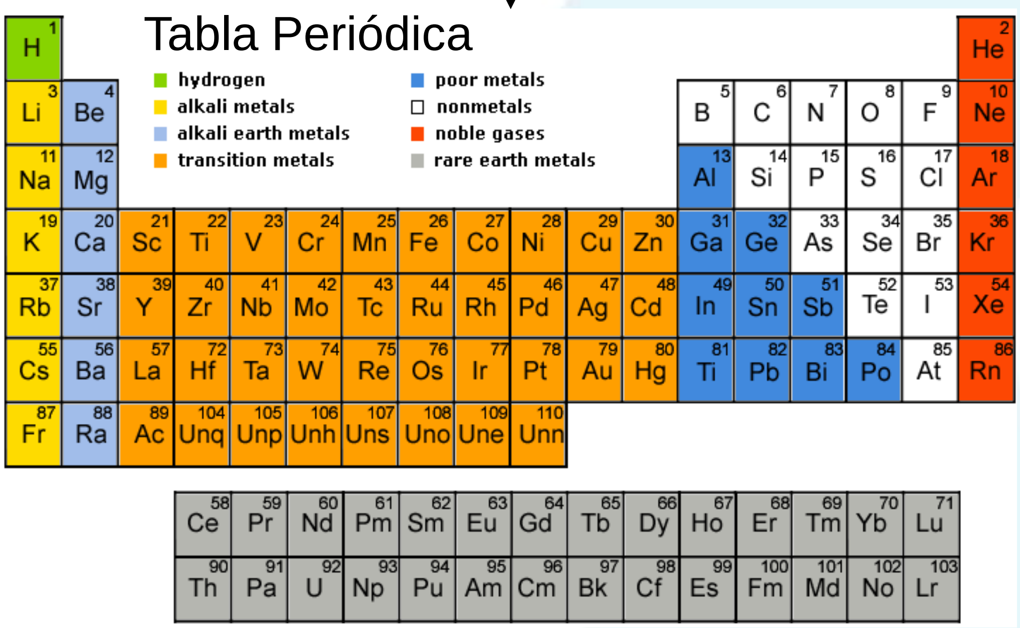
Biólogo

Teoría de Relaciones

Relación de Equivalencia

Clasificación de
los Elementos

Ejemplo

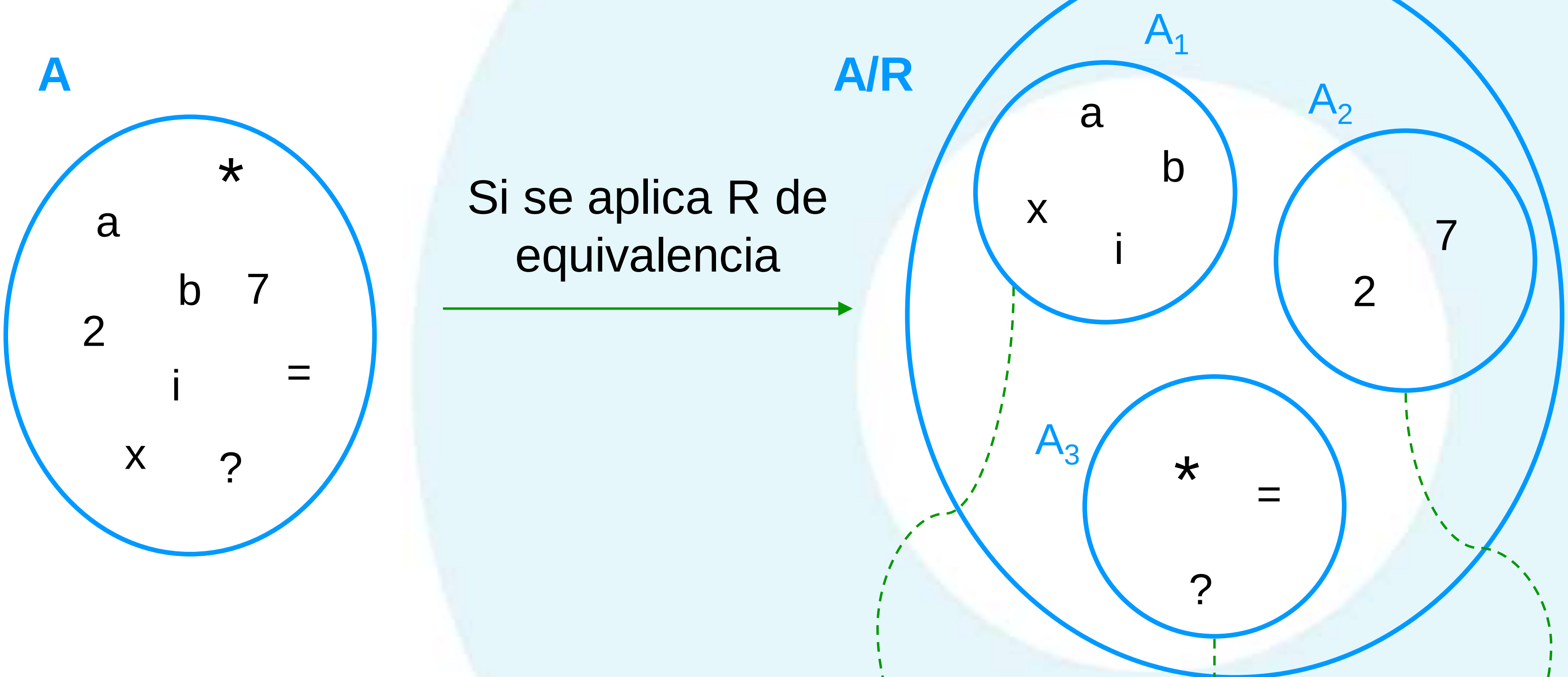


Químico

Teoría de Relaciones

Relación de Equivalencia

Idea Intuitiva



Conjunto Cociente = A/R = $\{A_1, A_2, A_3\}$

Clases de Equivalencia

Relación de Equivalencia

Una relación R sobre un mismo conjunto A es de equivalencia si R es Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Notación:

Si R es de equivalencia entonces $(x, y) \in R$ o xRy se denota como $\mathbf{x \sim y}$.

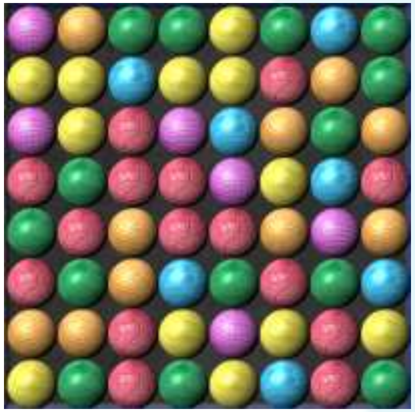
$x \sim y$ se lee como: "**x esta relacionado con y**" ó "**x es equivalente a y**"

Ejemplo

Sea A un conjunto de metras unicolores.
En A se establece la relación R de modo tal que para dos metras x y y del conjunto A, $(x, y) \in R$ sii 'x' tiene el mismo color de 'y',

es decir, veremos como equivalentes a dos metras 'x' y 'y' sii 'x' es del mismo color que 'y', y lo representamos como $x \sim y$.

A



$$\xrightarrow[\text{sobre A}]{\text{Se aplica } \sim}$$

$A / \sim$

$R = \{ (x, y) \ / \ x, y \in A \ \wedge \ (x \text{ tiene el mismo color que } y) \}$

Teoría de Relaciones

Relación de Equivalencia

Ejemplo

Esta relación en A satisface tres propiedades:

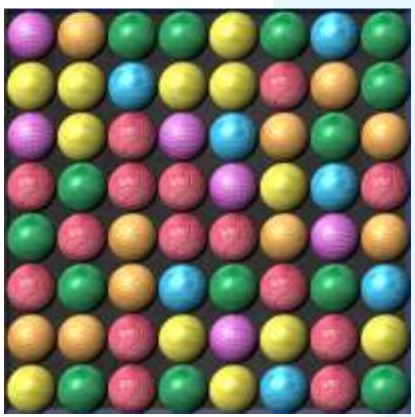
(R) Todas las metras ‘x’ de A satisfacen que $x \sim x$

(S) Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$, para todas las x, y de A relacionadas

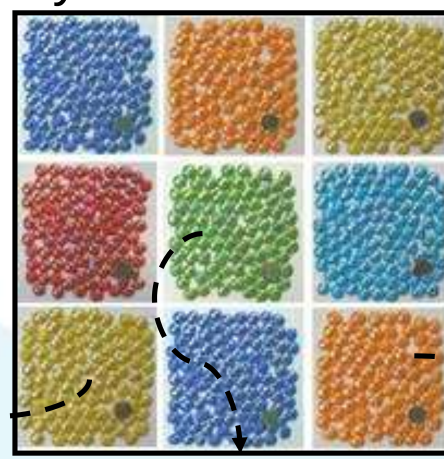
(T) Si $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $x \sim z$, para todas las x, y, z de A relac.

Entonces R cumple que es Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

A



$$\xrightarrow[\text{sobre A}]{\text{Se aplica} \sim}$$



A / ~
Conjunto Cociente

Clases de Equivalencia

R es una **relación de equivalencia**.

Teoría de Relaciones

Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente

Asociados a las relaciones de equivalencia, existen 2 conceptos importantes:

R de Equivalencia

Clase de Equivalencia

Conjunto Cociente

Teoría de Relaciones

Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en $A \neq \emptyset$.

Un problema de interés: Determinar todos los elementos de A que son equivalentes a un elemento 'a' dado (a un representante de la clase de equivalencia).

Clase de Equivalencia

Sea $a \in A$ y sobre A se aplica una relación de equivalencia $\sim$, la clase de equivalencia de a, es el conjunto formado por todos los elementos de A que están relacionados con "a" (son equivalentes a "a"), por medio de $\sim$.

$$[\,a\,] = \{\, x \,/\, x \in A \wedge x \sim a \,\}$$

Notación: La clase de equivalencia de un elemento a se puede denotar como: Ka, Ca, a/R, a/~ o [a].

Teoría de Relaciones

Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en $A \neq \emptyset$.

Otro problema de interés: Determinar todas las agrupaciones de elementos que se dan en el conjunto A.

Conjunto Cociente

El conjunto cociente de A por $\sim$, es la Familia de Conjuntos formada por <u>todas</u> las clases de equivalencia (distintas) generadas por $\sim$ (por R) en A.

$$\mathbf{A / R = \{ A_i \,/\, A_i = [\, a \,],\ a \in A\ ,\ i \in I \ \}}$$

Notación: El conjunto cociente de A por R se denota por: A / R o A / $\sim$.

Propiedades de las Clases de Equivalencia y del Conjunto Cociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en $A \neq \varnothing$, entonces las Clases de Equivalencia y el Conjunto Cociente asociados a $\sim$, verifican las siguientes propiedades:

1.- Toda Clase de Equivalencia es no vacía: $\forall a \in A$: $[a] \neq \varnothing$, es decir, $\boldsymbol{\forall a\, [\, a \in A \rightarrow [a] \neq \varnothing\,]}$, o también $\forall [a]\, [\, [a] \neq \varnothing\,]$

2.- Cualesquiera sean a y b $\in A$,
Si $a \sim b$ entonces $[a] = [b]$ y si $[a] = [b]$ entonces $a \sim b$, es decir:
$\boldsymbol{\forall a \in A\ \forall b \in A\ [\, [a] = [b] \leftrightarrow a \sim b\,]}$

Teoría de Relaciones

Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente

Propiedades de las Clases de Equivalencia y del Conjunto Cociente

3.- El Conjunto Cociente generado por $\sim$, es una partición de A.
A / ~ = ∏(A)

4.- Cualquier partición ∏(A) de A, es una relación de equivalencia $\sim$ sobre A.
∏(A) → ∃~ definida en A que genera esa ∏(A)

Demostraciones intuitivas de la Propiedades

1.- Toda Clase de Equivalencia es no vacía: $\forall a \in A$: $[a] \neq \emptyset$, es decir, $\forall \mathbf{a}\ [\ \mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow [\mathbf{a}] \neq \emptyset\ ]$, o también $\forall [a]\ [\ [a] \neq \emptyset\ ]$

Para cualquier elemento a de A, éste se relaciona al menos consigo mismo a través de **~**, ya que **~** es reflexiva, luego:

$$\forall \mathbf{a}\ [\ \mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{a} \sim \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \in [\mathbf{a}] \rightarrow [\mathbf{a}] \neq \emptyset\ ]$$

Teoría de Relaciones

Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente

Demostraciones intuitivas de la Propiedades

2.- Cualesquiera sean a y b $\in$A,
Si a $\sim$ b entonces [a] = [b] y si [a] = [b] entonces a $\sim$ b, es decir:
$\forall a \in A\ \forall b \in A\ [\ [a] = [b]\ \leftrightarrow\ a \sim b\ ]$

Si **[a] = [b]** entonces **$a \in [a] \wedge a \in [b]$**, luego **a~b** por la propia definición de Clase de equivalencia.

Si **a~b** entonces **$a \in$ [b]** y **$\forall x \in [b]: x \sim a$**, así que **$\forall x \in [b]: x \in [a]$**, por lo tanto **[b]=[a]**

Teoría de Relaciones

Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente

Demostraciones intuitivas de la Propiedades

3.- El conjunto cociente generado por R, es una partición del conjunto A: **A/R = Π(A)**

Sabiendo que el conjunto cociente por comprensión es:

$$A/R = \{A_i \,/\, A_i = [a] \wedge a \in A \wedge i \in I\}$$

Se debe demostrar que A/R cumple con:

I. $[a] \neq \varnothing \qquad \forall\, [a] \in A/R$

II. $[a] \cap [b] = \varnothing \qquad \forall\, [a], [b] \in A/R \wedge [a] \neq [b]$

III. $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

Demostraciones intuitivas de la Propiedades

4.- Cualquier partición $\prod(A)$ de **A**, es una relación de equivalencia ~ sobre A.

$\prod(A) \rightarrow \exists\sim$ **definida en A que genera esa** $\prod(A)$

Es evidente que una partición cualquiera de un conjunto **A**, puede ser visto como **el conjunto cociente** inducido por una relación de equivalencia **~** desconocida. Los conjuntos (agrupaciones) que forman la partición corresponden a las **clases de equivalencia** generadas por esta relación **~** desconocida. En este sentido, dos elementos cualesquiera **a** y **b** de **A** se relacionan a través de la relación desconocida sii pertenecen al mismo conjunto de la partición, es decir:

$$\forall a,b \in A: a\sim b \text{ sii } a\in A_i \text{ y } b\in A_i,\ A_i\in\prod(A)$$

Teoría de Relaciones

Ejemplo Completo

Demostrar que una relación dada es de equivalencia (probando sus propiedades), hallar clases de equivalencia y conjunto cociente y verificar que se cumplen las propiedades de estos últimos.

Teoría de Relaciones

Unidad II

(Parte 5: Relaciones de Orden)

Teoría de Relaciones

Contenido

- Relaciones de Orden
  - Definición
  - Orden Amplio y Orden Estricto
  - Conjunto Ordenado y Elementos Comparables
  - Orden Parcial y Orden Total
  - Diagrama de Hasse
  - Elementos Distinguidos de un Conjunto Ordenado

Definición

Sea R una relación definida en A (R $\subseteq$ A $\times$ A), R es una relación de orden si y solo si establece una precedencia entre los elementos de A, de manera tal que estén ordenados de acuerdo con algún criterio conveniente.

Teoría de Relaciones

Relación de Orden

Notación

Si R es de orden entonces xRy se denota como **x $\underline{\alpha}$ y** o **x $\underline{\mathcal{L}}$ y**.

x $\underline{\alpha}$ y se lee como: "x esta relacionado con y" ó "x precede o coincide con y" ó "y sucede o coincide con x".

Definiciones Asociadas

Conjunto Ordenado

Un conjunto A sobre el cual se define una relación de orden $\underline{\alpha}$, se dice que es un conjunto ordenado y se denota como (A, $\underline{\alpha}$).

Elementos Comparables

Sea (A, $\underline{\alpha}$) un conjunto ordenado. Se dice que x, y pertenecientes a A son elementos comparables si, o bien x $\underline{\alpha}$ y, o bien y $\underline{\alpha}$ x, según la relación de orden, es decir:

$$\text{x, y son comparables} \leftrightarrow x \,\underline{\alpha}\, y \;\vee\; y \,\underline{\alpha}\, x$$

Teoría de Relaciones

Relación de Orden

Una relación R de orden se puede clasificar en dos tipos de acuerdo a las propiedades que el cumpla:

- Relación de Orden
  - Orden Amplio
    - Total
    - Parcial
  - Orden Estricto
    - Total
    - Parcial

Tipos de Relaciones de Orden

Orden Amplio

Una relación R sobre un mismo conjunto A es de Orden amplio si R es Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva.

Orden Estricto

Una relación R sobre un mismo conjunto A es de Orden estricto si R es Arreflexiva, Asimétrica y Transitiva.

Subtipos de Relaciones de Orden

Orden Parcial

Una relación R definida en A es de orden parcial sii:

- R es una relación de orden.
- $\exists x\ \exists y\ [x, y \in A \wedge (x, y) \notin \underline{\alpha} \wedge (y, x) \notin \underline{\alpha}]$

es decir, existen elementos x,y pertenecientes a A que no son comparables según la relación de orden (no están relacionados).

Orden Total

Una relación R definida en A es de orden total sii:

- R es una relación de orden.
- $\forall x\ \forall y\ [x, y \in A \rightarrow ((x, y) \in \underline{\alpha} \vee (y, x) \in \underline{\alpha})]$

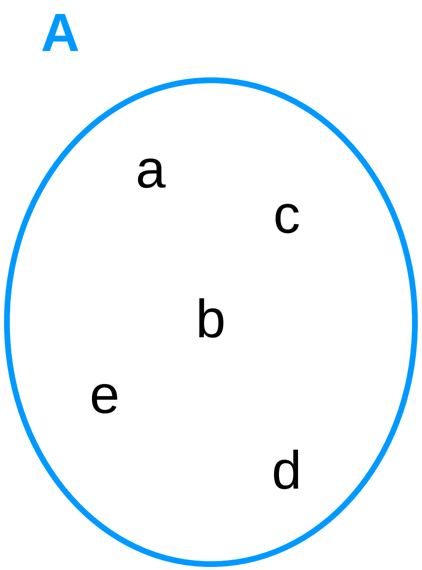
es decir, todo par de elementos pertenecientes a A son comparables.

Teoría de Relaciones

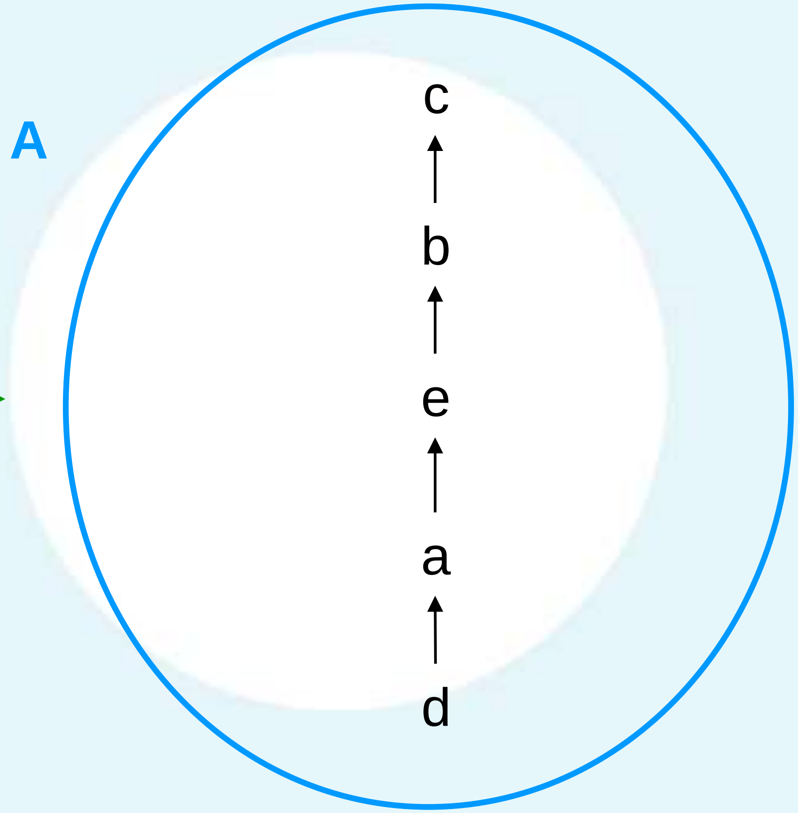
Relación de Orden

Idea Intuitiva

Orden Total



Si se aplica R de orden

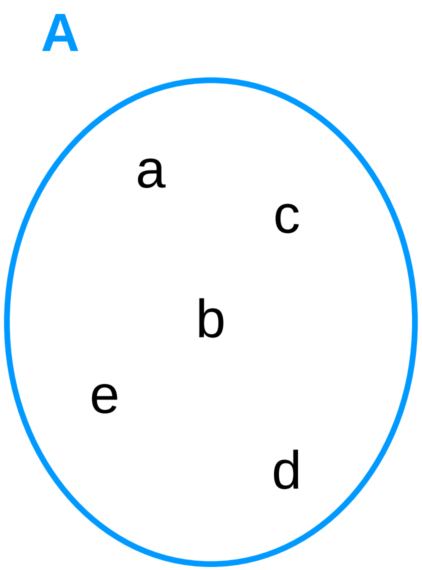


Teoría de Relaciones

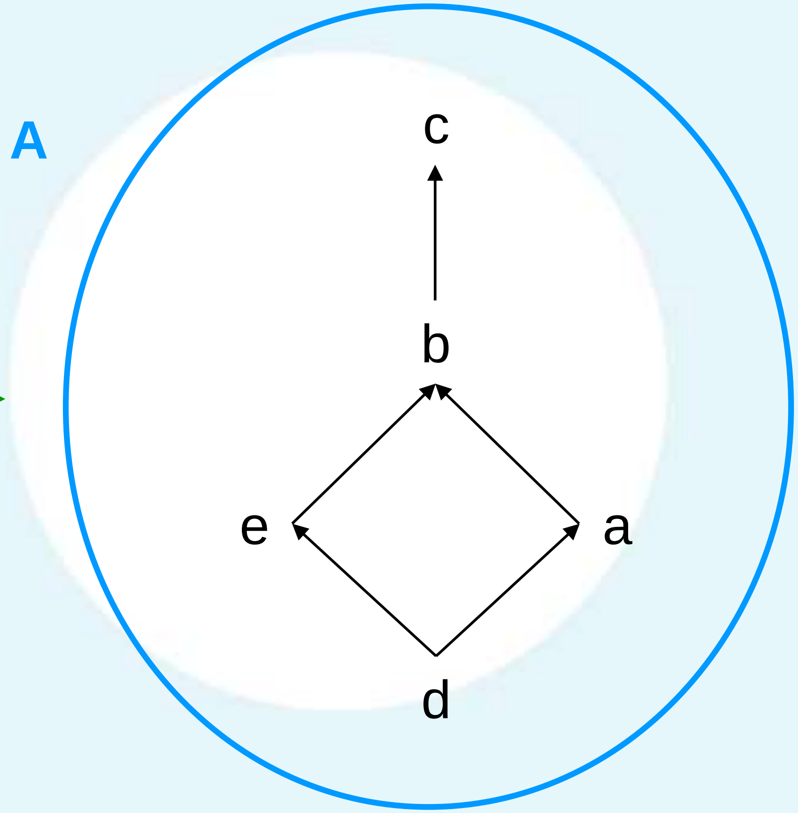
Relación de Orden

Idea Intuitiva

Orden Parcial



Si se aplica R de orden



Teoría de Relaciones

Diagramas de Hasse

Sea (A, $\underline{\alpha}$) un conjunto ordenado donde A es un conjunto finito, puede representarse mediante un diagrama de orden en donde se establecen las precedencias entre los elementos.

Previo a la construcción

Dos elementos ‘x’ y ‘y’ son consecutivos sii:

- $x \ \underline{\alpha}\ y$
- $x \ \underline{\alpha}\ a \ \underline{\alpha}\ y \Rightarrow (a = x \vee a = y)$

Teoría de Relaciones

Relación de Orden

Diagramas de Hasse

Construcción

A cada elemento de A se la da un punto en el espacio o plano (Se debe tomar en cuenta que el diagrama de Hasse se lee de abajo hacia arriba).

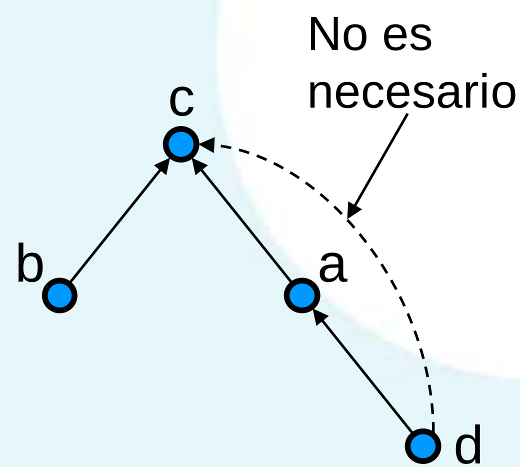
Cada par de elementos consecutivos ‘x’ y ‘y’ se unen por medio de un vector orientado en el sentido de ‘x’ a ‘y’ si $x\underline{\alpha}y$.

Ejemplo

Sean A = {a, b, c, d}

$R \subseteq A \times A$

R = { (a, a), (a, c), (b, b), (b, c),
(c, c), (d, d), (d, a), (d, c) }



La relación cumple con las propiedades:

- Reflexividad
- Antisimetría
- Transitividad.

Es de Orden Amplio, Parcial.

Elementos Distinguidos Generales de un Conjunto Ordenado

Sea (A, $\underline{\alpha}$) un conjunto ordenado.

Último o Mayor Elemento (M)

El elemento $M \in A$ se llama último elemento o elemento mayor si y solo si todo elemento de A precede o coincide con M.

$\exists M \forall x[\, M, x \in A \rightarrow x \underline{\alpha} M \,]$ Este elemento es único.

Primer o Menor Elemento (m)

El elemento $m \in A$ se llama primer elemento o elemento menor sii todo elemento de A sucede o coincide con m.

$\exists m \forall x[\, m, x \in A \rightarrow m \underline{\alpha} x \,]$ Este elemento es único.

Teoría de Relaciones

Relación de Orden

Elementos Distinguidos Generales de un Conjunto Ordenado

Sea (A, $\underline{\alpha}$) un conjunto ordenado.

Elementos Maximales (μ)

Un elemento $\mu \in A$ es un elemento maximal si y solo si no existe en A un elemento distinto que lo siga.

$\forall x[\ (x, \mu \in A \wedge x \neq \mu]) \rightarrow (\mu, x) \notin \underline{\alpha}\ ]$

Elementos Minimales (δ)

Un elemento $\delta \in A$ es un elemento minimal si y solo si no existe en A un elemento distinto que lo preceda.

$\forall x[\ (x, \delta \in A \wedge x \neq \delta) \rightarrow (x, \delta) \notin \underline{\alpha}\ ]$

Teoría de Relaciones

Relación de Orden

Elementos Distinguidos Relativos a $S \subseteq A$ de un Conjunto Ordenado

Sea $(A, \underline{\alpha})$ un conjunto ordenado y sea $S \subseteq A$.

Conjunto de Cotas Superiores de $S \subseteq A$ (CCS)

Un elemento $p \in A$ es una cota superior de $S \subseteq A$ si y solo si p sucede o coincide a todo elemento de S.

$\forall x[\ (x \in S \wedge p \in A) \rightarrow x\underline{\alpha}p\ ]$

Conjunto de Cotas inferiores de $S \subseteq A$ (CCI)

Un elemento $q \in A$ es una cota inferior de $S \subseteq A$ si y solo si q precede o coincide a todo elemento de S.

$\forall x[\ (x \in S \wedge q \in A) \rightarrow q\underline{\alpha}x\ ]$

Teoría de Relaciones

Elementos Distinguidos Relativos a S $\subseteq$ A de un Conjunto Ordenado

Sea (A, $\underline{\alpha}$) un conjunto ordenado y sea S $\subseteq$ A.

Supremo de S $\subseteq$ A o Cota Superior Mínima (Sup)

Es la menor de las cotas superiores de S.

$\forall$p[p$\in${ccs de S} $\rightarrow$ sup$\underline{\alpha}$p]. Este elemento es único.

Ínfimo de S $\subseteq$ A o Cota Inferior Máxima (Inf)

Es la mayor de las cotas inferiores de S.

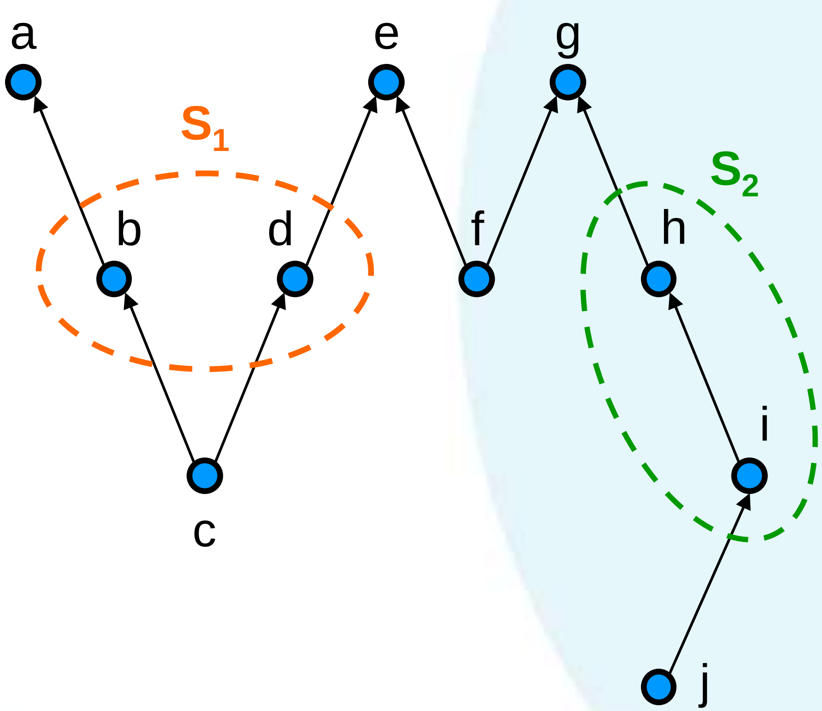
$\forall$q[q$\in${cci de S} $\rightarrow$ q$\underline{\alpha}$inf]. Este elemento es único.

Teoría de Relaciones

Relación de Orden

Ejemplo

Dado el siguiente diagrama de Hasse hallar:



Elementos distinguidos generales:

M = $\nexists$
m = $\nexists$
μ = { a, e, g }
δ = { c, f, j }

Elementos distinguidos particulares a:

S_1 = { b, d }	S_2 = { h, i }
CCS = $\varnothing$	CCS = { g, h }
CCI = { c }	CCI = { i, j }
Sup = $\nexists$	Sup = h
Inf = c	Inf = i

Teoría de Relaciones

Relación de Orden: Ejemplo Completo

Tomar un ejercicio de la práctica y demostrar que una cierta R, definida por comprensión sobre un conjunto finito, es una relación de orden amplio u orden estricto. Seguidamente verificar si es de orden total o parcial. Dibujar el diagrama de Hasse asociado e identificar los elementos distinguidos.