

Nociones de Lógica

Unidad I





Nociones de Lógica

Concepto de Lógica

Lógica y Razonamiento

Tipos de Razonamientos

Lógica Simbólica

Proposición

Construcción del Lenguaje de la Lógica Simbólica

La lógica es la ciencia del razonamiento, el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto.

Razonamiento

Es cualquier grupo de oraciones declarativas tal que una de ellas se afirma que deriva de las otras, las cuales se consideran evidencia de la verdad de la primera.





Nociones de Lógica

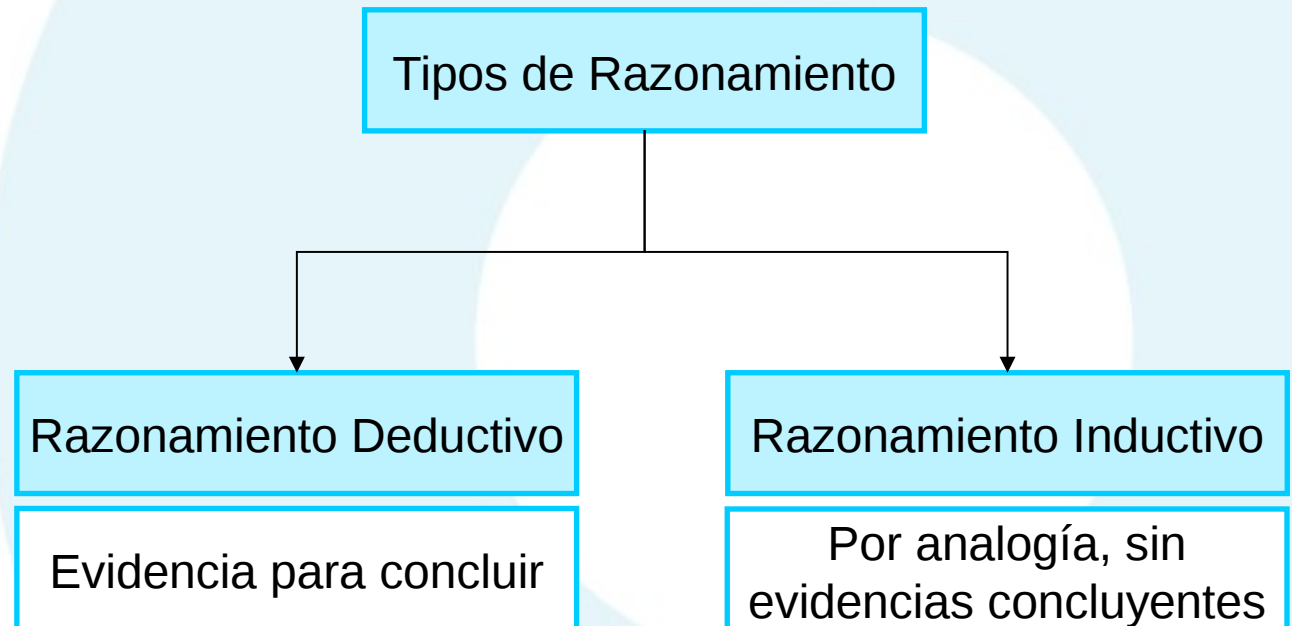
Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica





Nociones de Lógica

Razonamiento Deductivo

Lógica y
Razonamiento

Sus premisas ofrecen una evidencia concluyente de la verdad de la conclusión.

Tipos de
Razonamientos

Razonamiento Inductivo

Lógica
Simbólica

No aspira demostrar la verdad de su conclusión como derivada necesariamente de sus premisas, sino que sólo afirma su probabilidad, o sea, cierta evidencia de ella. El más común es la analogía.

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica



Nociones de Lógica

Ejemplos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Ustedes son estudiantes de FACYT. Están en el primer año. Estudian computación. Entonces deben tener como materia a Elementos Discretos.

Este cantante siempre tiene buenas canciones. Ha salido al mercado un nuevo CD de ese cantante. Varios amigos me lo han recomendado. Como todos sus CD's anteriores me han gustado, entonces este CD debe gustarme.

Razonamiento Deductivo

Razonamiento Inductivo



Nociones de Lógica

Lógica y
Razonamiento

Esta asignatura se enfocara en el estudio de los Razonamientos Deductivos solamente.

Tipos de
Razonamientos

Pero antes veamos el concepto de Proposición

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica





Nociones de Lógica

Proposición

Lógica y
Razonamiento

Es el contenido o significado de una oración declarativa, del cual se puede decir inequívocamente que es verdadero o falso.

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

El valor de verdad de una proposición es el valor verdadero o valor falso que adquiere la proposición.

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica



Nociones de Lógica

Algunas Consideraciones

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

- Oraciones de igual significado (aún escritas de diferentes formas) son la misma proposición.
- Quedan excluidas del concepto de proposición aquellas expresiones: admirativas, interrogativas e imperativas que no encierren ningún significado asociable a un valor de verdad.
- Una proposición admite sólo un valor de verdad (v ó f).



Nociones de Lógica

Proposiciones Simples

Lógica y
Razonamiento

Son aquellas que representan hechos atómicos, no se pueden dividir en otras más sencillas.

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposiciones Compuestas

Proposición

Son aquellas formas de enunciados que constan de dos ó más proposiciones simples vinculadas mediante conectivos lógicos.

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica



Nociones de Lógica

Ejemplos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Indique si las siguientes expresiones son proposiciones, en caso de serlo diga si son simples o compuestas:

1. Bolívar fue el vencedor de Carabobo. (P)
2. ¡Vallase de aquí! (NP)
3. Te ruego que me perdones mis estupideces. (NP)
4. Si los deseos fueran caballos, los mendigos cabalgarían. (P)
5. Si llueve mañana, no voy a la playa. (P)
6. $x + y \geq 10$ (NP)



Nociones de Lógica

Ejemplos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Indique si las siguientes expresiones son proposiciones, en caso de serlo diga si son simples o compuestas:

7. ¿Qué pasa con el equipo de fútbol de Venezuela? (NP)
8. Está lloviendo. (P)
It's raining. (P)
Estuvo lloviendo. (P)
Va a llover. (P)
9. No me grites, por favor. (NP)
10. Deseo que te vaya bien en el viaje. (NP)
11. ¿Es cierto que Luis participará en el próximo maratón? (NP*)



Nociones de Lógica

Lógica y
Razonamiento

La Lógica Simbólica es el estudio de la lógica mediante la matemática, es la matematización de la lógica.

Tipos de
Razonamientos

Se necesita construir un lenguaje simbólico y la formulación de reglas de operación precisas.

Lógica
Simbólica

Proposición

Primero que nada, estudiaremos algunos conceptos básicos tales como:

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Premisa

Conclusión

Inferencia



Nociones de Lógica

Premisa

Lógica y
Razonamiento

Es cualquier proposición que admitimos como cierta. Cualquier enunciado considerado como fuente de una inferencia.

Tipos de
Razonamientos

Conclusión

Lógica
Simbólica

Es otra proposición, la cual se trata de deducir lógicamente a través de las premisas.

Proposición

Inferencia

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Paso discursivo de una proposición o grupo de proposiciones a otra llamada conclusión.



Nociones de Lógica

Razonamiento

Lógica y
Razonamiento

Un razonamiento está formado por proposiciones, entre las cuales se encuentran las premisas y la conclusión.

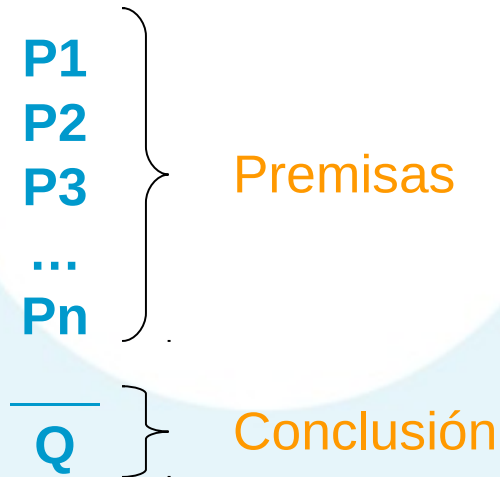
Tipos de
Razonamientos

Forma general de un razonamiento:

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica





Nociones de Lógica

Construcción del Lenguaje



Nociones de Lógica

Elementos de la Lógica Proposicional

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Alfabeto
(Letras y Símbolos)

Reglas de
Formación

Axiomas o
Cadenas Iniciales

Reglas de
Transformación



Nociones de Lógica

Alfabeto

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Proposiciones simples:

Minúsculas del alfabeto castellano comenzando convencionalmente con p. Representan una proposición simple. Ejemplo: p, q, r, s.

Proposiciones Compuestas:

Mayúsculas del alfabeto castellano y comienzan convencionalmente con P. Generalmente representan una proposición compuesta.

Ejemplo: P, Q, R, S.

Valores de verdad:

Dos constantes: 'v' y 'f'. Una para verdadero: 'v' y la otra para falso: 'f'.



Nociones de Lógica

Alfabeto

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

**Proposiciones y Valores de verdad:
Ejemplos**

1. Bolívar fue el vencedor de Carabobo

p: Bolívar fue el vencedor de Carabobo. $p \equiv f$

2. Los deseos son caballos y los mendigos cabalgan.

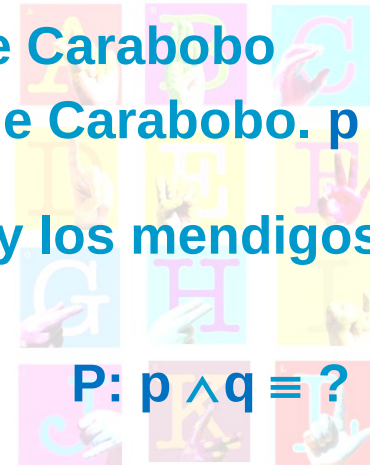
p: Los deseos son caballos

q: Los mendigos cabalgan

P: $p \wedge q \equiv ?$

3. $5 + 2 \geq 10$

p: $5 + 2 \geq 10$. $p \equiv f$





Nociones de Lógica

Alfabeto

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Conectivos lógicos

Para identificar los conectivos lógicos se emplearán los siguientes símbolos:

\neg

Negación.

\wedge

y, conjunción.

\vee

o, o inclusivo, disyunción.

$\underline{\vee}$

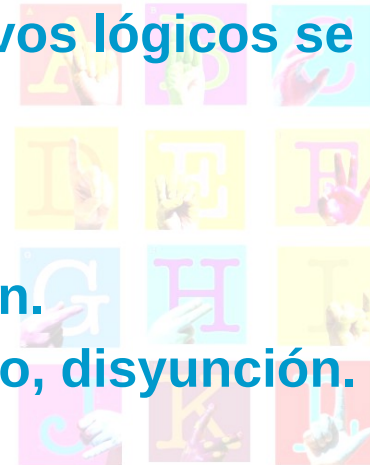
o exclusivo.

\rightarrow

Condicional, implicación material.

\leftrightarrow

Bicondicional.





Nociones de Lógica

Alfabeto

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Otros conectivos:

\Rightarrow

Implicación lógica.

\models

Tautología.

\equiv

Equivalencia lógica.





Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Negación (\neg)

Niega la proposición. Al negar una proposición, se está afirmando la contraria.

- La negación de una proposición verdadera es falsa.
- La negación de una proposición falsa es verdadera.

Ejemplos:

p : Bolívar es el vencedor de Carabobo.

$\neg p$: Bolívar no es el vencedor de Carabobo.

p es verdadero, esto es: $p \equiv v$. Por lo tanto: $\neg p \equiv f$

p : Luis sale alguna vez con Rosa.

$\neg p$: Luis nunca sale con Rosa.



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Negación (\neg)

Nota:

Convencionalmente, al traducir del lenguaje natural al lenguaje de lógica simbólica, las proposiciones negadas se extraen en su forma afirmativa; y luego cuando se proceda a simbolizar, recurrimos al conectivo negación para expresar la proposición original.

Ejemplo:

María no hizo sus deberes

p: María hizo sus deberes. **Simbolización:** $\neg p$



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Tabla de verdad de la Negación (\neg)

La negación de una proposición verdadera es falsa.

La negación de una proposición falsa es verdadera.

p	$\neg p$
v	f
f	v



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Conjunción (\wedge)

Consiste en afirmar como equivalente en una sola proposición (compuesta), un grupo de proposiciones afirmadas por separado. En el lenguaje natural en castellano, reconocemos las conjunciones cuando vemos en un párrafo nexos como: “y”, “sin embargo”, “no obstante”, “pero”, “aunque”, “,” (coma), “.”, y combinaciones de ellos.



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Conjunción (\wedge) Ejemplos:

1. El cielo está despejado,
pero el sol no calienta
mucho.

p : El cielo está despejado.

q : El sol calienta mucho.

(Note que la proposición se
extrae afirmativamente)

simbolización:

$p \wedge \neg q$ (se lee: p y no q)

2. Algunas personas nacen
grandes, otras consiguen la
grandeza, y a otras les ha sido
impuesta.

p : Algunas personas nacen
grandes.

q : Algunas personas
consiguen la grandeza.

r : A algunas personas se les
impone la grandeza.

simbolización:

$p \wedge q \wedge r$



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Tabla de verdad de la Conjunción (\wedge)

- Una conjunción de proposiciones, cada una de las cuales es verdadera, la conjunción es verdadera.
- Una conjunción de proposiciones no todas verdaderas, es falsa. (basta que una sea falsa, para que la conjunción de todas sea falsa).

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Disyunción (\vee) ($\underline{\vee}$)

Es la proposición formada por la conexión de proposiciones mediante las palabras “o”, “o bien”. Existen dos tipos: 'o' inclusivo: \vee , y él 'o' exclusivo: $\underline{\vee}$.

Por Ejemplo:

1. La tienda abre en la mañana o en la tarde.

p: La tienda abre en la mañana.

q: La tienda abre en la tarde.

simbolización:

$p \vee q$

Normalmente trabajaremos con el 'o' inclusivo.

2. La tienda abre sólo en la mañana o sólo en la tarde.

p: La tienda abre en la mañana.

q: La tienda abre en la tarde.

simbolización:

$p \underline{\vee} q$ (sólo admite una de las dos posibilidades, pero no ambas al mismo tiempo)



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Tabla de verdad de la Disyunción Inclusiva (\vee)

Establece que entre 2 proposiciones se da una de ellas o ambas a la vez; esto es, la disyunción es verdadera si al menos una de sus proposiciones es v.

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Tabla de verdad de la Disyunción Exclusiva (\vee)

Establece que entre 2 proposiciones se da una de ellas, pero no ambas al mismo tiempo; esto es, la disyunción es verdadera sólo cuando una de sus dos proposiciones es falsa.

p	q	$p \vee q$
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Condicional (\rightarrow)

Es una proposición de la forma:
"entonces ... "

"Si ...

↑
antecedente

↑
consecuente

Si <antecedente> entonces <consecuente>

se conoce como **implicación material**, o simplemente implicación; existe otro tipo de condicional llamado **implicación lógica** (será discutido luego).



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Condional (\rightarrow)

En el lenguaje natural (castellano), la simbolización $p \rightarrow q$, donde p y q son proposiciones, se identifica en las siguientes frases:

GRUPO 1:

“sí p entonces q ”

“si p , q ”

“ p implica q ”

GRUPO 2:

“ q sí p ”

“ q siempre que p ”

“ q cuando p ”

“ q se deduce de p ”

GRUPO 3:

“ p sólo si q ” “ p solamente si q ”

“ p es condición suficiente para q ”

“una condición suficiente para q es p ”

“ q es condición necesaria para p ”

“una condición necesaria para p es q ”

PILAS! Todas las frases anteriores se simbolizan $p \rightarrow q$



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Condicional (\rightarrow) Ejemplo:

Si existiera un control efectivo de la contaminación ambiental, entonces el Lago de Valencia estaría en mejores condiciones.

p: Existe un control efectivo de la contaminación ambiental.

q: El Lago de Valencia está en mejores condiciones.

simbolización: $p \rightarrow q$

Si se vota en las elecciones venideras, se debe tener 18 años.

p: Se vota en las elecciones venideras.

q: Se debe tener 18 años.

simbolización: $p \rightarrow q$

Nota1: Es importante identificar claramente que proposición es consecuencia inequívoca de cual. Es decir, saber distinguir bien entre antecedente y consecuente.



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Tabla de verdad del Condicional (\rightarrow)

La única combinación que hace falso a un condicional, es cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. En los demás casos, el condicional es verdadero.

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Nota2: Para el condicional o implicación material, existe la expresión lógica: $\neg p \vee q$, que es equivalente a $p \rightarrow q$.



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Equivalencia entre $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$

Expresando la relación que existe entre $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
v	v	f	v	v
v	f	f	f	f
f	v	v	v	v
f	f	v	v	v

Tanto $p \rightarrow q$ como $\neg p \vee q$ tienen los mismos valores de verdad. A la proposición $\neg p \vee q$ se le llama **Definición del Condicional**.



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Bicondicional (\leftrightarrow)

Es la conjunción de dos condicionales: “sí p entonces q” y “si q entonces p”.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

que se escribe en una sola expresión como:

$$p \leftrightarrow q$$

se lee: p “si y sólo si” q

Se detecta por la presencia de expresiones como:

“Si y solo si” o “si y solamente si”



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Bicondicional (\leftrightarrow) Ejemplos:

Se puede estudiar en la universidad si y solo si se es bachiller.

p: Se puede estudiar en la universidad.

q: Se es bachiller.

Si se puede estudiar en la universidad entonces se es bachiller: $p \rightarrow q$

Si se es bachiller entonces se puede estudiar en la universidad: $q \rightarrow p$.

simbolización: $p \leftrightarrow q$

Luis obtendrá el empleo si y sólo si es graduado en química.

p: Luis obtiene el empleo.

q: Luis es graduado en química.

simbolización: $p \leftrightarrow q$



Nociones de Lógica

Conectivos Lógicos

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Regla del Bicondicional (\leftrightarrow)

Un bicondicional es verdadero si y solo si las dos proposiciones que lo forman son ambas verdaderas o ambas falsas.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	f
f	v	v	f	f
f	f	v	v	v



Nociones de Lógica

Ejemplo Completo

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

O el ladrón atravesó la puerta, o el delito fue cometido desde adentro y uno de los sirvientes debe estar implicado en él. El ladrón sólo pudo atravesar la puerta si el cerrojo fue levantado desde adentro; pero uno de los sirvientes seguramente se halla implicado en el delito, si el cerrojo fue alzado desde el interior. Luego, uno de los sirvientes se halla implicado en el delito.

p: El ladrón atraviesa la puerta.

q: El delito se comete desde adentro.

r: Uno de los sirvientes debe estar implicado en el delito.

s: El cerrojo es levantado desde adentro.

Simbolización de las premisas:

$$P_1: p \vee (q \wedge r)$$

$$P_2: p \rightarrow s$$

$$P_3: s \rightarrow r$$

Simbolización de la conclusión:

$$Q: r$$

Simbolización del razonamiento de manera horizontal:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \rightarrow Q, \text{ entonces:}$$

$$([p \vee (q \wedge r)] \wedge [p \rightarrow s] \wedge [s \rightarrow r]) \rightarrow r$$



Nociones de Lógica

Tabla de Verdad

Lógica y
Razonamiento

Es una forma de representar y calcular el valor de verdad de una expresión proposicional para cada una de las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples que la conforman.

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

En la sección anterior, las reglas del valor de verdad de cada conectivo lógico, se expresaron a través de una tabla de verdad.

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica



Nociones de Lógica

Tabla de Verdad

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Ejemplo: Construir la tabla de verdad de $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
v	v	f	f	v	f	v
v	f	f	v	f	f	f
f	v	v	f	v	f	v
f	f	v	v	v	v	v

Dada una expresión lógica cualquiera, el número de combinaciones de valores de verdad que puede tomar es 2^n , con 'n', el número de proposiciones simples involucradas en la expresión.



Nociones de Lógica

Agrupación y Paréntesis

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Son símbolos que usaremos para eliminar la ambigüedad cuando se trata de agrupar proposiciones. Para esto hacemos uso de paréntesis según ciertas convenciones con relación a los conectivos lógicos:

- 1.- Una proposición negada será tratada como una proposición simple.
- 2.- Si contiene sólo conectivos de un mismo tipo, agruparemos de izquierda a derecha.



Nociones de Lógica

Agrupación y Paréntesis

Lógica y
Razonamiento

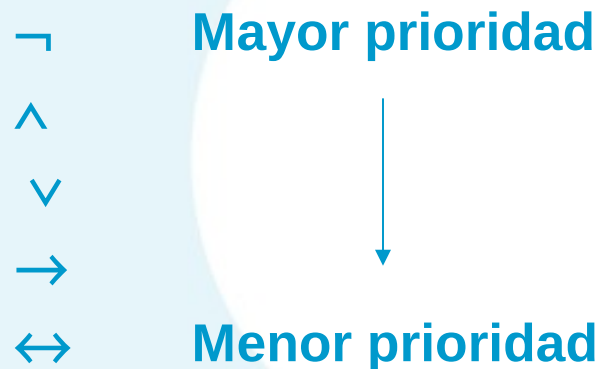
Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

3.- Si posee varios conectivos diferentes agrupamos por el siguiente orden de prioridad:





Nociones de Lógica

Agrupación y Paréntesis

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Ejemplos:

$$(1) \quad p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \leftrightarrow s \leftrightarrow t \\ (((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow s) \leftrightarrow t$$

$$(2) \quad \neg p \wedge \neg q \rightarrow t \vee p \leftrightarrow q \wedge \neg r$$

Paso 1: $(\neg p) \wedge (\neg q) \rightarrow t \vee p \leftrightarrow q \wedge (\neg r)$
se agrupan primero las proposiciones negadas, sin embargo no mantendremos los paréntesis por asuntos de legibilidad.

Paso 2: $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow t \vee p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$
se agrupan por las conjunciones.

Paso 3: $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (t \vee p) \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$
se agrupan por las disyunciones.

Paso 4: $[(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (t \vee p)] \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$
se agrupan por los condicionales.

Falta el bicondicional pero ya todo quedo agrupado y no hay ambigüedad, no es necesario colocar paréntesis.



Nociones de Lógica

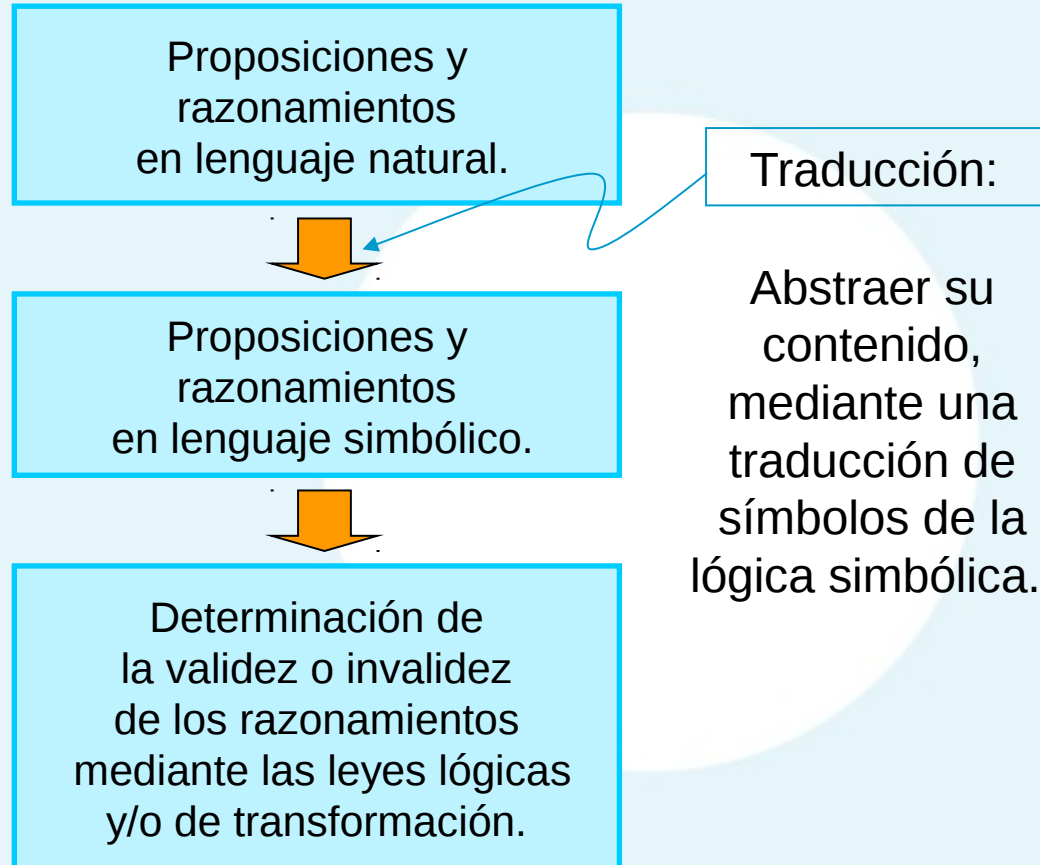
Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica





Nociones de Lógica

Reglas de
Formación

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Son procedimientos usados en la obtención de expresiones del lenguaje de lógica proposicional.

- I. Una proposición simple es una fórmula bien formada (f.b.f.).
- II. Si P es una f.b.f. entonces $\neg P$ también lo es.
- III. Si P y Q son f.b.f. entonces $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ y $P \leftrightarrow Q$, son también fórmulas bien formadas.

Toda f.b.f. puede obtenerse aplicando reiteradamente (i) al (iii).

Nota: Recordemos que las letras mayúsculas: P , Q , R , S ,... pueden denotar tanto una proposición simple como una cadena de proposiciones unidas por los conectivos lógicos (proposición compuesta).



Nociones de Lógica

Axiomas o
Cadenas Iniciales

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Son fórmulas bien formadas que se aceptan como verdaderas. Sean P , Q y R f.b.f., entonces los axiomas serán:

- i. $P \vee Q \equiv Q \vee P$
- ii. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
- iii. $P \vee f \equiv P$
- iv. $P \vee v \equiv v$
- v. $P \vee \neg P \equiv v$



Nociones de Lógica

Reglas de Transformación

Lógica y Razonamiento

Tipos de Razonamientos

Lógica Simbólica

Proposición

Construcción del Lenguaje de la Lógica Simbólica

Regla de Dualidad: Si en una equivalencia lógica (donde no aparezcan los conectivos \rightarrow ni \leftrightarrow) se intercambian simultáneamente los conectivos de disyunción y conjunción, y las constantes 'v' y 'f', seguirá siendo equivalencia.

Regla de Sustitución: Si en una equivalencia lógica, sustituimos una proposición P en todos los lugares donde aparezca por otra proposición Q, la equivalencia lógica sigue manteniéndose.

Ejemplo: $P \vee \neg P \equiv v$, sustituyendo P por $(P \rightarrow Q)$
 $(P \rightarrow Q) \vee \neg(P \rightarrow Q) \equiv v$



Nociones de Lógica

Axiomas o
Cadenas Iniciales

Lógica y
Razonamiento

Tipos de
Razonamientos

Lógica
Simbólica

Proposición

Construcción
del Lenguaje de
la Lógica
Simbólica

Son fórmulas bien formadas que se aceptan como verdaderas. Sean P , Q y R f.b.f., entonces los axiomas serán:

i. $P \vee Q \equiv Q \vee P$

ii. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$

iii. $P \vee f \equiv P$

iv. $P \vee v \equiv v$

v. $P \vee \neg P \equiv v$

i. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

ii. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

iii. $P \wedge v \equiv P$

iv. $P \wedge f \equiv f$

v. $P \wedge \neg P \equiv f$



Nociones de Lógica

Simplificación, Demostración, Pruebas de Invalidez y Pruebas de Validez



Nociones de Lógica

Tautología, Contradicción y Contingencia

Tautología:

Se dice que una f.b.f. es **tautología**, cuando su valor de verdad es verdadero para todas las combinaciones de valores de verdad de sus proposiciones simples. Esta se denota por \models

Ejemplo: $p \vee \neg p$ siempre es verdad.

Simbolización: $p \vee \neg p \models$

Contradicción:

Una f.b.f. es una **contradicción**, cuando su valor de verdad es falso para todas las combinaciones de valores de verdad de sus proposiciones simples.

Ejemplo: $p \wedge \neg p$ siempre es falso.

Contingencia:

Una f.b.f. es una **contingencia**, cuando su valor de verdad puede ser v ó f.

Ejemplo: $p \wedge q$



Nociones de Lógica

Equivalencia Lógica

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes cuando el bicondicional entre ellas es una tautología. Es decir:

$P \equiv Q$ si se cumple que $P \leftrightarrow Q$ es una \models

Cuando dos proposiciones son equivalentes, ellas tienen la misma tabla de verdad. Anteriormente vimos que $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. En efecto, pudimos comprobar que sus tablas de verdad son iguales. Verifiquemos que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ es una tautología.

(1) (2)

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$
v	v	f	v	v	v
v	f	f	f	f	v
f	v	v	v	v	v
f	f	v	v	v	v

Entonces como $(1) \leftrightarrow (2)$
 \models decimos que $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$



Nociones de Lógica

Tautologías o Leyes Lógicas

Sean P , Q y R f.b.f. y ' \vee ' y ' \wedge ', las constantes verdadero y falso, entonces:

01	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	Ley conmutativa de \vee Ley conmutativa de \wedge
02	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	Ley asociativa de \vee Ley asociativa de \wedge
03	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Ley distributiva de \vee con respecto a \wedge por la izquierda Ley distributiva de \wedge con respecto a \vee por la izquierda Ley distributiva de \vee con respecto a \wedge por la derecha Ley distributiva de \wedge con respecto a \vee por la derecha
04	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	Ley de absorción de \vee Ley de absorción de \wedge
05	$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	Ley de De Morgan de \vee Ley de De Morgan de \wedge
06	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	Ley del contrarrecíproco
07	$P \vee P \equiv P$ $P \wedge P \equiv P$	Ley de idempotencia de \vee Ley de idempotencia de \wedge
08	$P \vee \neg P \equiv v$ $P \wedge \neg P \equiv f$	Ley de complementación o tercero excluido
09	$\neg (\neg P) \equiv P$	Ley de doble negación
10	$P \vee v \equiv v$ $P \vee f \equiv P$ $P \wedge f \equiv f$ $P \wedge v \equiv P$	Leyes de identidad



Nociones de Lógica

Aplicaciones de las Leyes Lógicas

1. Simplificar Proposiciones Compuestas.
2. Demostrar Equivalencias Lógicas.
3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos.



Nociones de Lógica

1. Simplificación de Proposiciones Compuestas

La simplificación de una proposición compuesta o expresión lógica, consiste en **reducir la expresión a una forma más simple** mediante el uso de los **axiomas y/o leyes lógicas**.

La simplificación consiste en ir desarrollando la expresión paso a paso mediante la **sustitución** de una expresión lógica equivalente hasta llegar a una expresión lógica irreducible.

Usando simplificación se puede determinar si una expresión lógica es una tautología, una contradicción o una contingencia.

Tautología cuando el resultado final de la simplificación es v

Contradicción cuando el resultado final de la simplificación es f

Contingencia cuando el resultado final de la simplificación es una expresión lógica.



Nociones de Lógica

1. Simplificación de Proposiciones Compuestas

Simplificar la expresión:

$$[(p \rightarrow p) \vee \neg q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \rightarrow (p \vee \neg q)]$$

$$\begin{aligned} & [(p \rightarrow p) \vee \neg q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \rightarrow (p \vee \neg q)] \equiv \\ & [(\neg p \vee p) \vee \neg q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [\neg p \vee (p \vee \neg q)] \equiv (2) \\ & [(\neg p \vee p) \vee \neg q] \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge [(\neg p \vee p) \vee \neg q] \equiv (3) \\ & (v \vee \neg q) \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge (v \vee \neg q) \equiv \\ & v \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \wedge v \equiv \\ & v \wedge v \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \equiv \\ & v \wedge [\neg q \vee (r \wedge q)] \equiv \\ & \neg q \vee (r \wedge q) \equiv \\ & (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee q) \equiv \\ & (\neg q \vee r) \wedge v \equiv \\ & \neg q \vee r \end{aligned}$$

- Justificaciones:**
- (1) Def. del condicional.
 - (2) Ley asociativa de \vee .
 - (3) Ley de complementación.
 - (4) Ley de identidad.
 - (5) Ley conmutativa de la \wedge .
 - (6) Ley de idempotencia.
 - (7) Ley distributiva de la \vee respecto de la \wedge por la izq.



Nociones de Lógica

2. Demostración de Equivalencias Lógicas

A través de la simplificación podemos demostrar una equivalencia lógica sin usar tablas de verdad, esto se puede lograr de 3 formas:

1. Se desarrolla un lado de la equivalencia **paso a paso** mediante la sustitución hasta llegar a la expresión lógica del otro lado.
2. Se desarrollan **ambos lados** de la equivalencia lógica **por separado** utilizando las leyes lógicas **hasta llegar en ambos lados a la misma expresión irreducible**.
3. Se aplica la definición de equivalencia lógica y **se demuestra que el bicondicional asociado es una tautología** simplificando la expresión completa (ahora con el bicondicional) hasta llegar al valor de verdad verdadero.



Nociones de Lógica

2. Demostración de Equivalencias Lógicas

Demostrar que $[\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)] \rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

Se procederá desarrollando el lado izquierdo para llegar a $p \vee q$

$$[\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)] \rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv \quad (1)$$

$$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv \quad (2)$$

$$[\neg p \wedge (\neg q \vee q)] \rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv \quad (3)$$

$$(\neg p \wedge v) \rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv \quad (4)$$

$$\neg p \rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv \quad (5)$$

$$\neg(\neg p) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \quad (6)$$

$$p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \quad (7)$$

$$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \equiv \quad (3)$$

$$v \wedge (p \vee q) \equiv \quad (4)$$

$$p \vee q$$

Justificaciones:

(1) Ley de De Morgan de la \vee

(2) Ley distributiva de la \wedge respecto de la \vee por la izq.

(3) Ley de complementación.

(4) Ley de identidad.

(5) Def. del condicional.

(6) Ley de doble negación.

(7) Ley distributiva de la \vee respecto de la \wedge por la izq.



Nociones de Lógica

El Condicional Directo y Sus condicionales Asociados

Siendo P y Q , dos proposiciones cualesquiera; al condicional

$P \rightarrow Q$ se le llama comúnmente **condicional directo**.

Existen asociados a él los siguientes condicionales:

$$\neg P \rightarrow \neg Q$$

llamado **contrario** del directo.

$$Q \rightarrow P$$

llamado **recíproco** del directo.

$$\neg Q \rightarrow \neg P$$

llamado **contrarrecíproco**.

Veamos esquemáticamente:

$$P \rightarrow Q \quad \text{recíproco} \quad Q \rightarrow P$$

contrario

contrarrecíproco

contrario

$$\neg P \rightarrow \neg Q \quad \text{recíproco} \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

Por ley del contrarrecíproco, se tienen las siguientes equivalencias:

$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ el condicional **directo** es equivalente al **contrarrecíproco**.

$\neg P \rightarrow \neg Q \equiv Q \rightarrow P$ el condicional **contrario** es equivalente al **recíproco**.



Nociones de Lógica

Implicación Lógica

Se dice que una proposición P **implica lógicamente** una proposición Q si y sólo si el condicional $P \rightarrow Q$ es siempre verdadero, es decir, si $P \rightarrow Q$ es una tautología.

Se denota como: $P \Rightarrow Q$ ó $P \rightarrow Q \models$

Es de hacer notar que si el condicional $P \rightarrow Q$ es una tautología, no ocurre el único caso en que la valuación de dicho condicional es falso, es decir, el caso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso nunca ocurre.

Siempre que $P \equiv v$ ocurre que $Q \equiv v$, y nunca sucede que $P \equiv v$ y $Q \equiv f$.



Nociones de Lógica

Implicación Lógica

P	Q	$P \Rightarrow Q$
v	v	v
---v---	---f---	-----f-----
f	v	v
f	f	v

No ocurre

Si P implica lógicamente a Q, se dice igualmente que Q es **consecuencia lógica** de P.



Nociones de Lógica

Implicación Lógica

Generalización de la definición de implicación lógica:

Sean las proposiciones P_1, P_2, \dots, P_n asumidas como ciertas y a las que se llama **premisas**, y sea la proposición Q , a la que se llama **conclusión**.

Se dice que P_1, P_2, \dots, P_n implican lógicamente a Q si y sólo si el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ es siempre verdadero, es decir, si es una tautología.

Se denota como:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow Q \quad \text{ó} \quad (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q \models$$

Si P_1 y P_2 y... y P_n implican lógicamente a Q , se dice que Q es **consecuencia lógica** de P_1 y P_2 y... y P_n o sea, la conclusión es consecuencia lógica de la conjunción de sus premisas.

Afirmar que: $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ es una tautología, significa que cada vez que $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \equiv v$, entonces $Q \equiv v$.



Nociones de Lógica

Implicación Lógica

EJEMPLO: Determinar si $\neg P$ es consecuencia lógica de $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$

Una forma de probar lo anterior es demostrando que el condicional $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P$ es una tautología.

$$\begin{aligned} [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P &\equiv (1) \\ \neg[(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q] \vee \neg P &\equiv (2) \\ \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q) \vee \neg P &\equiv (3) \\ [(\neg(\neg P) \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg Q)] \vee \neg P &\equiv (4) \\ [(P \wedge \neg Q) \vee Q] \vee \neg P &\equiv (5) \\ [(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)] \vee \neg P &\equiv (6) \\ [(P \vee Q) \wedge V] \vee \neg P &\equiv (7) \\ (P \vee Q) \vee \neg P &\equiv (8) \\ (Q \vee P) \vee \neg P &\equiv (9) \\ Q \vee (P \vee \neg P) &\equiv (6) \\ Q \vee V &\equiv (7) \\ V & \end{aligned}$$

Justificaciones:

- (1) Def. del condicional.
- (2) Ley de De Morgan de la \wedge
- (3) Ley de De Morgan de la \vee
- (4) Ley de doble negación.
- (5) Ley distributiva de la \vee respecto de la \wedge por la der.
- (6) Ley de complementación.
- (7) Ley de identidad.
- (8) Ley conmutativa de la \vee .
- (9) Ley asociativa de la \vee .

\therefore Como se obtuvo la constante verdadero como resultado, se concluye que $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P \models$
Luego, $\neg P$ es consecuencia lógica de $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$.



Nociones de Lógica

Doble Implicación Lógica

Sean dos proposiciones P y Q , tales que P implica lógicamente a Q y, a su vez, Q implica lógicamente a P , entonces se dice que existe una **doble implicación** entre P y Q , y se denota como:

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{ó} \quad P \leftrightarrow Q \quad | =$$



Nociones de Lógica

Condición Necesaria y Suficiente

Dada una implicación lógica, $P \Rightarrow Q$, se tiene que:

P es **condición suficiente** de Q y

Q es **condición necesaria** de P

Cuando se da el caso de que P es condición suficiente de Q y a su vez, Q es condición suficiente de P se dice que P es **condición necesaria y suficiente** de Q y se simboliza como una doble implicación lógica entre P y Q: $P \Leftrightarrow Q$.

Ejemplo:

Es suficiente con que un animal tenga branquias para que sea un pez y es suficiente que sea un pez para tenga branquias.

p: Un animal es un pez.

q: Un animal tiene branquias.

Simbolización: $(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$



Nociones de Lógica

Argumentos o Razonamientos Lógicos

Un **argumento o razonamiento lógico** es una secuencia de proposiciones P_1, P_2, \dots, P_n y Q , tal que el valor de verdad de la proposición Q se puede deducir a partir de las proposiciones P_1, P_2, \dots, P_n asumidas como verdaderas.

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

Si a partir de las premisas asumidas verdaderas, se obtiene una conclusión verdadera, entonces se dice que **el razonamiento es válido**, es decir, hay una implicación lógica de las premisas a la conclusión.

Si asumidas la premisas verdaderas, la conclusión es falsa, entonces **el razonamiento es inválido**.

Una conjunción falsa de premisas no conduce a conclusión alguna y por lo tanto se considera mal formulado el razonamiento.



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Prueba de Invalidez

Un razonamiento es inválido cuando **asumidas sus premisas verdaderas**, se puede obtener una **conclusión falsa**.

Si conseguimos al menos una combinación de valores de verdad para las proposiciones simples involucradas en el razonamiento, que haga las premisas verdaderas y la conclusión falsa, podemos asegurar que **el razonamiento es inválido**.

En realidad, lo que estamos haciendo es **construir un contraejemplo** para el razonamiento que permite demostrar que la implicación no es tautológica, ya que existe al menos un caso para el cual la expresión toma valor falso.

Por lo tanto, la prueba de invalidez consiste en hallar al menos una combinación de valores que cumpla las características mencionadas.





Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Prueba de Invalidez (Ejemplo)

Imaginemos que nos dan un cierto teorema que dice:

“Si X es un número entero y Y es un número entero, entonces la suma de X y Y será un número entero par”.

p: X es un número entero
q: Y es un número entero
r: X + Y es un número entero par

Simbolización: $(p \wedge q) \rightarrow r$

P1: p

P2: q

Q: r

p	q	r
v	v	f



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Prueba de Invalidez: (Ejemplo)

César fue a Inglaterra o bien Pompeyo fue a España o Craso marchó contra los patriotas. No es el caso de que ambos, César fue a a Inglaterra y Craso no fue muerto por los patriotas. Si César fue a Inglaterra y Cicerón denunció a Catalina, entonces Craso marchó contra los patriotas. Es por ello que Pompeyo fue a España solo si Craso fue muerto por los patriotas.

Simbolización:

P1: $p \vee (q \vee r)$ $\equiv v$

P2: $\neg(p \wedge \neg s)$ $\equiv v$

P3: $(p \wedge t) \rightarrow r$ $\equiv v$

Q: $q \rightarrow s$ $\equiv f$

q	s	p	t	r
v	f	f	v	f

∴ He hallado una combinación de valores de verdad que hace todas las premisas verdaderas y la conclusión falsa, luego he hallado un contraejemplo para la supuesta tautología y por lo tanto el razonamiento es inválido.



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

Se denomina **inferencia lógica** al proceso que se aplica a un razonamiento lógico, para obtener el valor de verdad de la conclusión Q , a partir de las premisas asumidas verdaderas.

Existen diversos métodos para llevar a cabo la inferencia lógica y ellos hacen uso de las **reglas de inferencia** y de las **leyes lógicas**.

Inferencia lógica

- Determinación de la validez de razonamientos
- Demostración de teoremas
- Programación lógica (PROLOG)



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

Reglas de Inferencia o Razonamientos Válidos Elementales

La inferencia lógica hace uso de ciertos razonamientos válidos que son elementales y que han recibido el nombre de reglas de inferencia. El hecho de ser válidos significa que al ser sus premisas verdaderas, su conclusión también lo es.

Modus ponens

$$P_1: P \rightarrow Q$$

$$P_2: P$$

$$Q: Q$$

Modus tollens

$$P_1: P \rightarrow Q$$

$$P_2: \neg Q$$

$$Q: \neg P$$

Silogismo hipotético

$$P_1: P \rightarrow Q$$

$$P_2: Q \rightarrow R$$

$$Q: P \rightarrow R$$

Silogismo disyuntivo:

$$P_1: P \vee Q$$

$$P_2: \neg P$$

$$Q: Q$$



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

Reglas de Inferencia o Razonamientos Válidos Elementales

Silogismo constructivo

$$P1: P \rightarrow Q$$

$$P2: R \rightarrow S$$

$$P3: P \vee R$$

$$Q: Q \vee S$$

Silogismo destructivo

$$P1: P \rightarrow Q$$

$$P2: R \rightarrow S$$

$$P3: \neg Q \vee \neg S$$

$$Q: \neg P \vee \neg R$$

Conjunción

$$P_1: P$$

$$P_2: Q$$

$$Q: P \wedge Q$$

Exportación

$$P_1: (P \wedge R) \rightarrow Q$$

$$Q: P \rightarrow (R \rightarrow Q)$$

Simplificación

$$P_1: P \wedge Q$$

$$Q: P$$

Adición

$$P_1: P$$

$$Q: P \vee Q$$

Importación

$$P1: P \rightarrow (R \rightarrow Q)$$

$$Q: (P \wedge R) \rightarrow Q$$

Reducción al absurdo

$$P1: P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$$

$$Q: \neg P$$



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

Pruebas de
Validez

1. Prueba por Tabla de verdad
2. Prueba por Tautología
3. Método Directo o Argumentación Directa
4. Prueba por Condicional
5. Argumentación indirecta o Reducción al Absurdo



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

1. Prueba por Tabla de Verdad

Se evalúa la tabla de verdad asociada al razonamiento dado y se comprueba que el mismo es tautología

2. Prueba por Tautología

Esta prueba consiste en probar que el condicional $(P1 \wedge P2 \wedge \dots \wedge Pn) \rightarrow Q$, es una tautología. En el caso que se obtenga el valor de verdad falso, o una contingencia, el razonamiento es inválido.



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

3. Prueba por Argumentación Directa o Método Directo

En este método se parte de las premisas P_1, P_2, \dots, P_n , asumidas como verdaderas, y se construye una **prueba formal de validez**, la cual consiste en una sucesión de deducciones intermedias, mediante reglas de inferencia y/o leyes lógicas, de tal manera que el último enunciado obtenido sea la conclusión Q del razonamiento que se está probando.

Debido a que las tautologías son siempre verdaderas, entonces los resultados que se obtienen de su aplicación son también verdaderos, en particular, la conclusión.



Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

4. Prueba por Condicional

Este método es aplicable únicamente en el caso particular en que la conclusión del razonamiento es un condicional, esto es, cuando se tiene un razonamiento de la forma: $(P1 \wedge P2 \wedge \dots \wedge Pn) \rightarrow (Q1 \rightarrow Q2)$

En este caso, además de asumirse las premisas $P1, P2, \dots, Pn$ verdaderas, se asume que el antecedente $Q1$ del condicional de la conclusión, es verdadero y se toma como una premisa adicional. Así, el razonamiento se convierte en:

$$(P1 \wedge P2 \wedge \dots \wedge Pn \wedge Q1) \rightarrow Q2$$

Si el razonamiento reformulado es válido el original también lo es.





Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

5. Prueba por Argumentación Indirecta o Reducción al Absurdo

La prueba por argumentación indirecta, también conocida como prueba por contradicción o método de reducción al absurdo, consiste en asumir que Q no es verdadera sino que es verdadera su negación $\neg Q$, la cual es agregada como una premisa mas.

Partiendo de este hecho y manteniendo la asunción de que las premisas son verdaderas, se desarrolla el proceso de inferencia en busca de una contradicción.

En caso de alcanzar la contradicción, dado que las premisas son verdaderas, el único elemento que puede haber hecho falsa la conjunción de premisas es $\neg Q$, lo que indica que $\neg Q$ es falsa y por lo tanto Q es verdadera.





Nociones de Lógica

3. Determinar la validez o invalidez de razonamientos lógicos

Métodos para Probar la Validez de Razonamientos Lógicos

5. Prueba por Argumentación Indirecta o Reducción al Absurdo

Probar la validez de $(P1 \wedge P2 \wedge \dots \wedge Pn) \rightarrow Q$

$$P1 \wedge P2 \wedge \dots \wedge Pn \wedge \neg Q \equiv \dots \equiv f$$
$$\therefore \neg Q \equiv f, \text{ luego } Q \equiv v$$



Nociones de Lógica

Lógica de Predicados



Nociones de Lógica

Concepto de Lógica de Predicados

Es la parte de la lógica que estudia las funciones proposicionales y su **cuantificación**.

Para definir función proposicional, se requiere considerar los siguientes elementos:

1. El universo del discurso, **U**, el cual consiste en un espacio fijo dado de elementos, objetos, cosas, individuos, etc., a los cuales hace referencia la función proposicional.
2. Una variable denotada **x**, **y**, **z**, ..., que es la representación simbólica de los elementos de **U**, es decir, dicha variable toma valores en **U**.



Nociones de Lógica

Función Proposicional

Una **función proposicional** se define como la expresión $P(x)$ tal que se convierte en proposición cuando se sustituye x por un valor particular arbitrario perteneciente al universo del discurso.

Nótese entonces que **la función proposicional no es una proposición en sí misma**, por lo tanto, no se puede decir nada acerca de su valor de verdad hasta tanto no se sustituya la variable por un valor del Universo. Nótese también que la definición anterior hace referencia a una función proposicional de una sola variable, x ; la definición puede ser fácilmente generalizada a funciones proposicionales de varias variables.



Nociones de Lógica

Función Proposicional

Ejemplo:

U = conjunto de los seres humanos.

$P(x)$: x es habitante de Venezuela.

Sea $x = \text{Héctor}$, entonces:

$P(\text{Hector})$: Hector es habitante de Venezuela.

(No es proposición)

(Proposición)



Nociones de Lógica

Función Proposicional

De acuerdo al número de variables que intervienen en la definición de la función proposicional, ésta recibe diferentes nombres:

- p Proposición simple, fórmula bien formada, etc.
- P Proposición compuesta, fórmula bien formada, etc.
- $P(x)$ Función proposicional de una variable, predicado o propiedad.
- $P(x, y)$ Función proposicional de dos variables, relación binaria.
- ...
- $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Función proposicional de n variables, relación n -aria.

En una función proposicional hasta que no se sustituyan las variables que intervienen en ella por valores particulares de U , no se puede decidir sobre su veracidad o falsedad.



Nociones de Lógica

Función Proposicional

Ejemplos:

Sea el Universo de los humanos, entonces las siguientes son funciones proposicionales definidas en ese universo, la primera es un predicado (o función proposicional) de una sola variable y la segunda es una relación binaria entre los elementos de U :

$P(x)$: x trabaja en la Universidad.

$Q(x, y)$: x vive cerca de y .

Al tomar elementos particulares de U para x , y y sustituirlos en $P(x)$ y $Q(x, y)$, se podrá concluir sobre la verdad o falsedad de las proposiciones resultantes.

Sea U el conjunto de los números enteros, las siguientes son funciones proposicionales de dos y tres variables respectivamente:

$M(x, y)$: x es menor que y .

$S(x, y, z)$: $x+y=z$

Se puede observar que:

$M(4,8) \equiv$ verdadero

$M(9,5) \equiv$ falso

$S(3,4,10) \equiv$ falso

$S(3,5,8) \equiv$ verdadero



Nociones de Lógica

Cuantificador y Proposición Cuantificada

Hay otra forma de decidir sobre la veracidad de la función proposicional, y consiste en formar **proposiciones cuantificadas o categóricas** mediante el uso de **cuantificadores**.

Cuantificadores

Universal: $\forall x[P(x)]$, $(x) P(x)$: para todo x perteneciente a U , se verifica $P(x)$.

Existencial: $\exists x[P(x)]$, $(\exists x)/P(x)$: existe al menos un x perteneciente a U , tal que verifica $P(x)$.

Un cuantificador es un "modificador" de la función proposicional. Ellos tienen la propiedad de que al anteponerlos a una función proposicional, la convierten en proposición sin necesidad de sustituir sus variables por elementos del universo del discurso U .



Nociones de Lógica

Cuantificador y Proposición Cuantificada

Así, si $U=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, entonces $\forall x[P(x)]$ y $\exists x[P(x)]$ tienen el siguiente desarrollo:

$$\forall x[P(x)] \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) = \bigwedge_{i=1}^n P(a_i)$$

El cuantificador universal que precede a $P(x)$ indica que:

$P(a_1) \equiv v$, y $P(a_2) \equiv v$, y ..., y $P(a_n) \equiv v$. lo que corresponde a la conjunción de las proposiciones $P(a_i)$, $i = 1, \dots, n$.

$$\exists x[P(x)] \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n) = \bigvee_{i=1}^n P(a_i)$$

El cuantificador existencial que precede a $P(x)$, indica que:

$P(a_1) \equiv v$, o $P(a_2) \equiv v$, o ..., o que $P(a_n) \equiv v$, lo que corresponde a la disyunción de las proposiciones $P(a_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Nota: El cuantificador universal se detecta por la presencia en la oración de palabras como "todo", "cualquiera", "cada uno", entre otras, y el cuantificador existencial por las palabras "alguno", "hay", "existe", "algún", "al menos uno".



Nociones de Lógica

Cuantificador y Proposición Cuantificada

Ejemplo:

Sea $U =$ El conjunto de los estudiantes de FACYT.

Las variables $x, y \in U$.

B(x): x es bachiller.

F(x): x estudia Física.

E(x, y): x y y estudian el mismo año.

Entonces se verifica que:

$$\forall x[B(x)] \equiv v$$

$$\forall x[F(x)] \equiv f$$

$$\neg \forall x[F(x)] \equiv v$$

$$\forall x \forall y[E(x, y)] \equiv f$$

$$\exists x \forall y[E(x, y)] \equiv f$$

$$\exists x[B(x)] \equiv v$$

$$\exists x[F(x)] \equiv v$$

$$\neg \exists x[F(x)] \equiv f$$

$$\forall x \exists y[E(x, y)] \equiv v$$

$$\exists x \exists y[E(x, y)] \equiv v$$

La negación de una proposición cuantificada verifica las siguientes equivalencias:

$$\neg \forall x[P(x)] \equiv$$

Desarrollo del $\forall x$.

$$\neg (P(a1) \wedge P(a2) \wedge \dots \wedge P(an)) \equiv$$

Por la Ley de De Morgan de \wedge

$$\neg P(a1) \vee \neg P(a2) \vee \dots \vee \neg P(an) \equiv$$

Desarrollo del $\exists x$.

$$\exists x[\neg P(x)]$$

Por lo cual tenemos que:

$$\neg \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\neg P(x)]$$

$$\neg \exists x[P(x)] \equiv \forall x[\neg P(x)]$$



Nociones de Lógica

Tipos de Proposiciones Cuantificadas

Sean $S(x)$ y $P(x)$ dos funciones proposicionales definidas en un universo dado U , las cuatro formas típicas de las proposiciones cuantificadas o categóricas se representan como:

Proposición **universal afirmativa**.

Todo S es P $\forall x [S(x) \rightarrow P(x)]$

Proposición **universal negativa**.

Ningún S es P $\forall x [S(x) \rightarrow \neg P(x)]$

Proposición particular o **existencial afirmativa**.

Algún S es P $\exists x [S(x) \wedge P(x)]$

Proposición particular o **existencial negativa**.

Algún S es no P $\exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$

Nota: Es importante aclarar que una proposición cuantificada puede también tomar otra forma, dependiendo del contenido de las funciones proposicionales que la constituyan y del universo del discurso que se defina. En la práctica, las cuatro proposiciones cuantificadas anteriores son las más comunes, para el caso de funciones proposicionales **de una sola variable**.



Nociones de Lógica

Tipos de Proposiciones Cuantificadas

Ejemplos:

Todas las sustancias que tienen la facultad de dar coloración azul al papel rojo de tornasol son ácidas.

Esta proposición es del tipo:
Todo S es P.

Sea U =el conjunto de las sustancias químicas.
 $x \in U$.

$C(x)$: x tiene la facultad de dar coloración azul al papel rojo de tornasol.

$A(x)$: x es ácido.

$$\forall x[C(x) \rightarrow A(x)]$$

Algunos dirigentes del gobierno no son graduados universitarios.

Esta proposición es del tipo:
Algún S es no P.

Sea U =conjunto de los seres humanos. $x \in U$.
 $D(x)$: x es dirigente del gobierno.
 $G(x)$: x es graduado universitario.

$$\exists x[D(x) \wedge \neg G(x)]$$



Nociones de Lógica

Tipos de Proposiciones Cuantificadas

Ejemplos:

Los buenos consejos nunca hacen daño.

Esta proposición es del tipo:

Ningún S es P.

Sea U = el conjunto de los mensajes. $x \in U$.

$C(x)$: x es un buen consejo.

$D(x)$: x hace daño.

$$\forall x [C(x) \rightarrow \neg D(x)]$$

Sea U = el conjunto de los números naturales.
 $x, y, z \in U$.

$$S(x, y, z): x + y = z$$

$$P(x, y, z): x \cdot y = z$$

$$M(x, y): x < y$$

Simbolizar las siguientes proposiciones:

Para cualquier x y cualquier y , hay un z tal que
 $x + y = z$

$$\forall x \forall y \exists z [S(x, y, z)]$$

Ningún x es menor que 0

$$\neg \exists x [R(x, 0)] \equiv \forall x [\neg R(x, 0)]$$

Para todo x , $x + 0 = x$

$$\forall x [S(x, 0, x)]$$

Hay un x tal que $x \cdot y = y$ para todo y

$$\exists x \forall y [P(x, y, y)]$$



Nociones de Lógica

Equivalencias e Implicaciones Lógicas con Cuantificadores

Sean $x, y \in U$,
 $P(x)$, $Q(x)$ y $P(x, y)$ funciones proposicionales y
 R una proposición cualquiera.

Las siguientes son equivalencias e implicaciones lógicas que usan cuantificadores:

01	$\forall x[P(x)] \equiv \neg \exists x[\neg P(x)]$	11	$\forall x[P(x)] \vee R \equiv \forall x[P(x) \vee R]$
02	$\exists x[P(x)] \equiv \neg \forall x[\neg P(x)]$	12	$\exists x[P(x)] \wedge R \equiv \exists x[P(x) \wedge R]$
03	$\forall x[P(x)] \Rightarrow \exists x[P(x)]$	13	$\exists x[P(x)] \vee R \equiv \exists x[P(x) \vee R]$
04	$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)]$	14	$\forall x[R \rightarrow P(x)] \equiv R \rightarrow \forall x[P(x)]$
05	$\forall x[P(x)] \vee \forall x[Q(x)] \Rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$	15	$\forall x \forall y[P(x, y)] \equiv \forall y \forall x[P(x, y)]$
06	$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x[P(x)] \vee \exists x[Q(x)]$	16	$\exists x \exists y[P(x, y)] \equiv \exists y \exists x[P(x, y)]$
07	$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)]$	17	$\exists y \forall x[P(x, y)] \Rightarrow \forall x \exists y[P(x, y)]$
08	$\exists x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$	18	$\exists x \forall y[P(x, y)] \Rightarrow \forall y \exists x[P(x, y)]$
09	$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow \forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$	19	$\neg \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$
10	$\forall x[P(x)] \wedge R \equiv \forall x[P(x) \wedge R]$	20	$\neg \exists x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$