Teoría de Relaciones

Relación	• Una relación definida en los conjuntos A_1, A_2, …, A_n, es un subconjunto del producto cartesiano de A_1 a A_n, es decir, $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. • $R=\{(x_1,x_2, \ldots, x_n) \;/\; x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \wedge P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv v\}$ (Relación n-aria) • $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 x A_2 x \ldots x A_n \wedge P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv v$
Relación Binaria	$n=2$, $R \subseteq A_1 \times A_2$, $R = \{ (x_1, x_2) / x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge P(x_1, x_2) \}$
Relación binaria definida en A	$n=2$, $R \subseteq A^2$, $R = \{ (x_1, x_2) / x_1 \in A \wedge x_2 \in A \wedge P(x_1, x_2) \equiv v \}$
Relación Terciaria	$n=3$, $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$, $R = \{ (x_1, x_2, x_3) / x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge x_3 \in A_3 \wedge P(x_1, x_2, x_3) \}$
Notación	$(x, y) \in R$ se puede escribir como xRy. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$ se puede escribir $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})Rx_n$.
Relación vs. Función	• Relación: Es una asociación de elementos entre conjuntos, sin restricciones. • Función: Es una asociación de elementos entre conjuntos, con la restricción: a cada elemento del dominio, le corresponde un solo elemento del codominio. • Conclusión: - Función es una relación especial; - Toda función es una relación; - Toda relación no es necesariamente una función.
Dominio, Rango y Relación inversa de una Relación	Sea $R = \{ (x, y) / x \in A \wedge x \in B \wedge P(x, y) \equiv v \}$ Se definen: • Dominio: $D(R) = \{ x / x \in A \wedge (x, y) \in R \}$ • Rango: $R(R) = \{ y / y \in B \wedge (x, y) \in R \}$ • R. Inversa: $R^{-1} = \{ (y, x) / (x, y) \in R \}$, $R^{-1} \subseteq B \times A$
Tipos de Relaciones Definidas en A	• R. Identidad: Es una relación binaria $R \subseteq A \times A$. $I_A = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in A \wedge x=y \}$ o $I_A = \{ (x, x) / x \in A \}$ • R. Universal: Es una relación binaria $R \subseteq A \times B$. $U_A = \{ (x, y) / x, y \in A \}$ • R. Vacía: Dado que $\varnothing \subseteq A$ para todo conjunto A, Podemos decir $\varnothing \subseteq A \times A$, por lo tanto $R = \varnothing$.

Representación de las relaciones

Sean $A = \{a, b\}$
$B = \{1, 2\}$
$R = \{(a, 1), (a, 2), (b,1)\}$

Grafo dirigido o Dígrafo:

$G = ((A \cup B), R)$

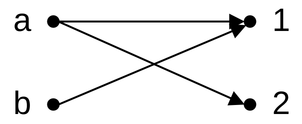
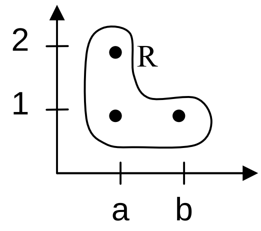


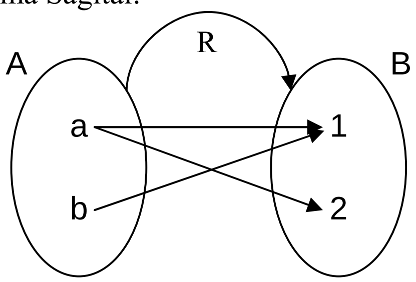
Grafico Cartesiano:



Matriz de Relación:

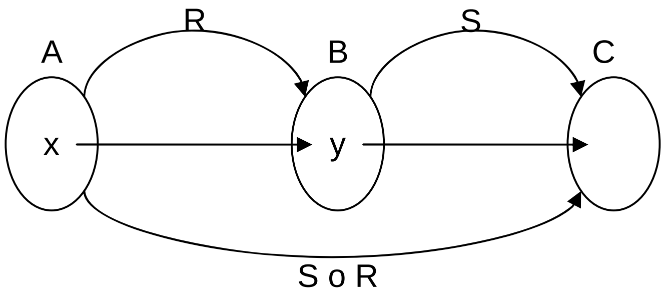
$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \end{array}$$

Diagrama Sagital:



Composición de Relaciones

$$S \text{ o } R = \{ (x, z)/\ x\in A \wedge z\in C \wedge \exists y\in B[(x, y)\in R \wedge (y, z)\in S] \}$$



Algunas operaciones con relaciones

Sean las relaciones:
R: $A \rightarrow B$
S_1: $B \rightarrow C$
S_2: $B \rightarrow C$
T: $C \rightarrow D$

Entonces:

- $(S_1 \cup S_2) \text{ o } R = (S_1 \text{ o } R) \cup (S_2 \text{ o } R)$
- $(S_1 \cap S_2) \text{ o } R \subseteq (S_1 \text{ o } R) \cap (S_2 \text{ o } R)$
- $T \text{ o } (S_1 \cup S_2) = (T \text{ o } S_1) \cup (T \text{ o } S_2)$
- $T \text{ o } (S_1 \cap S_2) \subseteq (T \text{ o } S_1) \cap (T \text{ o } S_2)$

Propiedades de las Relaciones

Reflexividad	R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall x\, [x \in A \Rightarrow (x, x) \in R]$
Variantes	No Reflexividad: R es no reflexiva $\Leftrightarrow \exists x\, [x \in A \wedge (x, x) \notin R]$
	Arreflexividad: R es arreflexiva $\Leftrightarrow \forall x\, [x \in A \Rightarrow (x, x) \notin R]$

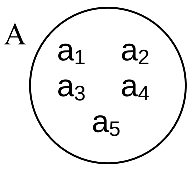
Simetría	R es simétrica $\Leftrightarrow \forall x \forall y\, [(x, y \in A \wedge (x, y) \in R) \Rightarrow (y, x) \in R]$
Variantes	No Simetría: R es no simétrica $\Leftrightarrow \exists x \exists y\, [x, y \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R]$
	Asimetría: R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall x \forall y\, [(x, y \in A \wedge (x, y) \in R) \Rightarrow (y, x) \notin R]$
	Antisimétrica: R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall x \forall y\, [(x, y \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y]$

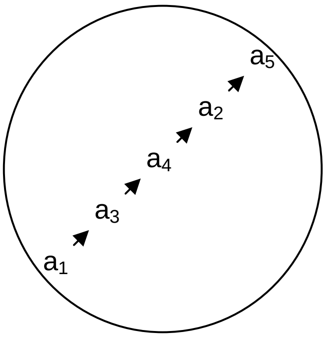
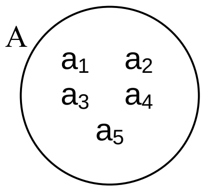
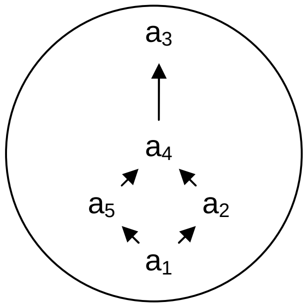
Transitividad	R es transitiva $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\, [(x, y, z \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R]$
Variantes	No transitiva: R es no transitiva $\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z\, [x, y, z \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R]$
	Atransitiva: R es atransitiva $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\, [(x, y, z \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \notin R]$

En la relación Vacío $\varnothing$	$R = \varnothing$ $\varnothing \subseteq A \times A$ R es arreflexiva, no reflexiva, simétrica, asimétrica, no simétrica, transitiva, atransitiva y no transitiva.
En la relación Identidad	Sea $A = \{1, 2, 3\}$ $I_A = \{ (x, x) / x \in A \} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$ I_A es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Clasificación de una Relación $R \subseteq A \times A$

Primera: **Relación de Equivalencia**	Una relación R definida en A es de equivalencia sii r es: ▪ Reflexiva. ▪ Simétrica. ▪ Transitiva. Notación: aRb se puede escribir como $a \sim b$ y se lee "a es equivalente a b", significando $(a, b) \in R$ o $(a, b) \in \sim$.
Clases de Equivalencia	La clase de equivalencia de un elemento cualquiera "a", $a \in A$, es el conjunto de elementos de A, que se relacionan con a. ▪ Definición: $[a]=\{x / x \in A \wedge x \sim a\}$ ▪ Notación: $[a]$, Ka, Ca, a/R, a/~.
Conjunto Cociente	El conjunto cociente de A por R (~), es la familia de conjuntos formada por todas las clases de equivalencia de A generadas por R (~). ▪ Definición: $A/R=\{Aa / Aa=[a], a \in A\}$ ▪ Notación: A/R, A/~. Este conjunto es una partición de A ($A/R=\pi(A)$). (i) $[a] \neq \varnothing$ (ii) $(a, b) \in R \leftrightarrow [a] = [b]$ entonces $[a] \neq [b] \rightarrow (a, b) \notin \sim$ $[a] \cap [b] = \varnothing$ (iii) $\bigcup_{a \in A} [a] = A$
Propiedades de las clases de Equivalencia y del Conjunto Cociente	1) Toda clase de equivalencia es no vacía: $[a] \neq \varnothing$ (i) $\forall a[a \in A \rightarrow [a] \neq \varnothing]$ 2) $aRb \leftrightarrow [a]=[b]$ $\forall a \forall b[a, b \in A, [a]=[b] \leftrightarrow aRb]$ 3) $A/R=\pi(A)$ 4) Dada una partición $\pi(A)$, existe una relación de equivalencia R que la induce en A.
Relación de Congruencia Modulo n	Es una relación de equivalencia definida en Z. Sea $R \subseteq Z \times Z$ y sea *n* un número entero fijo ≥ 2, R recibe el nombre de congruencia modulo n, si R es de la forma: $R = \{ (x, y) / x, y \in Z \wedge x - y = n \times k, k \in Z \}$. Donde n es fijo y k variable.

Segunda: **Relación de Orden**	Cuando en un conjunto A se considera una relación de orden R, la intención es establecer una precedencia entre los elementos de A, de manera tal que estén ordenados de acuerdo con algún criterio conveniente.  ← R de orden. En A se manifiesta un ordenamiento de sus elementos.

	(A, R) Conjunto ordenado A, al que se le aplica la relación R. Orden amplio total. Los elementos de A están ordenados en base a R.
 ← R' de orden. En A se manifiesta un ordenamiento de sus elementos.	 (A, R') Orden amplio parcial. Los elementos de A están ordenados en base a R'.

Notación	R se designa generalmente como: $\underline{\alpha}$, $\underline{\mathcal{L}}$. Se puede escribir entonces como: $\underline{\alpha} =\{(x, y)/ x, y \in A \wedge P(x, y)\}$ Y dados $x, y \in A$ x $\underline{\alpha}$ y significa que { ▪ "x precede o coincide con y". ▪ "y sucede o coincide con x". ▪ El par $(x, y)\in R$, $(x, y)\in\underline{\alpha}$, xRy.
Orden Amplio	Una relación R definida en A es de orden amplio sii R es: ▪ Reflexiva. ▪ Antisimétrica. ▪ Transitiva.
Orden Estricto	Una relación R definida en A es de orden estricto sii R es: ▪ Arreflexiva. ▪ Asimétrica. ▪ Transitiva.
Conjunto Ordenado	Conjunto A sobre el cual se define una relación de orden $(A, \underline{\alpha})$.
Elementos Comparables	Sea $(A, \underline{\alpha})$ un conjunto ordenado, se dice que $x, y\in A$ son elementos comparables si $x\underline{\alpha}y$ o $y\underline{\alpha}x$ según la relación de orden. x, y son comparables $\leftrightarrow (x\underline{\alpha}y \vee y\underline{\alpha}x)$.

Tipos de Orden	*Parcial:* R definida en A es de orden parcial sii: $\exists x \exists y[x, y \in A \wedge (x, y) \notin \underline{\alpha} \wedge (y, x) \notin \underline{\alpha}]$ *Total:* R de orden definida en A es de orden total sii: $\forall x \forall y[x, y \in A \rightarrow (x \underline{\alpha} y \vee y \underline{\alpha} x)]$
Diagramas de Hasse	Sea (A, $\underline{\alpha}$) un conjunto ordenado donde A es un conjunto finito, puede representarse mediante un diagrama de orden en donde se establecen las precedencias entre los elementos. Previo a la construcción: Dos elementos son consecutivos sii: ▪ $a \underline{\alpha} b$. ▪ $a \underline{\alpha} x \underline{\alpha} b \Rightarrow (x=a \vee x=b)$. Construcción: ▪ A cada elemento de A se la da un punto en el espacio o plano. ▪ Se une cada par de elementos consecutivos x, y por medio de un vector orientado en el sentido de x a y si $x \underline{\alpha} y$.
Elementos distinguidos generales de un conjunto ordenado	*Último o mayor elemento M:* El elemento $M \in A$ se llama último elemento o elemento mayor sii todo elemento de A precede o coincide con M. $\exists M \forall x[M, x \in A \rightarrow x \underline{\alpha} M]$. Este elemento es único.
	Primer o menor elemento m: El elemento $m \in A$ se llama primer elemento o elemento menor sii todo elemento de A sucede o coincide con m. $\exists m \forall x[m, x \in A \rightarrow m \underline{\alpha} x]$. Este elemento es único.
	Elementos maximales μ: Un elemento $\mu \in A$ es un elemento maximal sii no existe en A un elemento distinto que lo siga. $\forall x[(x, \mu \in A \wedge x \neq \mu]) \rightarrow (\mu, x) \notin \underline{\alpha}]$
	Elementos minimales δ: Un elemento $\delta \in A$ es un elemento minimal sii no existe en A un elemento distinto que lo preceda. $\forall x[(x, \delta \in A \wedge x \neq \delta) \rightarrow (x, \delta) \notin \underline{\alpha}]$
Elementos distinguidos relativos a $S \subseteq A$ de un conjunto ordenado	*Cotas superiores de $S \subseteq A$:* (Se busca un conjunto). Un elemento $p \in A$ es una cota superior de $S \subseteq A$ sii p sucede o coincide a todo elemento de S. $\forall x[(x \in S \wedge p \in A) \rightarrow x \underline{\alpha} p]$
	Cotas inferiores q de $S \subseteq A$: (Se busca un conjunto). Un elemento $q \in A$ es una cota inferior de $S \subseteq A$ sii q precede o coincide a todo elemento de S. $\forall x[(x \in S \wedge q \in A) \rightarrow q \underline{\alpha} x]$
	Supremo sup de $S \subseteq A$ o cota superior mínima: Es la menor de las cotas superiores. $\forall p[p \in \{\text{ccs de } S\} \rightarrow \sup \underline{\alpha} p]$. Este elemento es único.
	Infimo inf de $S \subseteq A$ o cota inferior máxima: Es la mayor de las cotas inferiores. $\forall q[q \in \{\text{cci de } S\} \rightarrow q \underline{\alpha} \inf]$. Este elemento es único.